FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

LIBRARY
OF THE
AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS VI.

5.06(47:4)S

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXVIII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXC.

4/20/1911/collated

16.70303 april 28

LIBRARY OF THE AMERICAN MUSEUM OF NATURAL HISTORY

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXVIII.

Avec deux Planches.

HISTOIRE. Pag.

Aſſemblée extraordinaire. - - - - - - - - - 3.
Leçons publiques & occupations de Mrs. les Académiciens. 5.
Gratifications accordées par Madame la Princeſſe de Daſchkaw. - - - - - - - - - 6.
Ouvrages publiés par l'Académie. - - - - ibid.
Morts. - - - - - - - - - - - - 7.
Réceptions. - - - - - - - - - - 8.
Ouvrages imprimés ou manuſcripts, machines, inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités préſentés ou envoyés à l'Académie. - - 9.
Prix propoſé par M. le Comte Apollos de Mouſſin-Pouſchkin, Gentil-homme de la chambre de Sa Majeſté Impériale. Pour l'année 1790. - 24.
Queſtion propoſée par l'Académie pour le Prix ordinaire de 1791. - - - - - - - - - 28.

Pag.

Extrait d'une lettre de M. Fries, Chirugien-Major, à M. l'Académicien Fuſs: ſur une inſcription ſyrainique. Planche A. - - - - - - - - 31.

Notice hiſtorique ſur la langue & l'écriture ſyrainique; communiquée par M. le Conſ. de Cour Lepechin, à l'occaſion de l'inſcription ancienne en cette langue, déterrée par M. Fries. - - - - - - 32.

SUPPLÉMENT. *Mémoires préſentés à l'Académie par des Savans étrangers & approuvés dans ſes Aſſemblées.* 35

Explication des uſages auxquels on peut employer utilement les lunettes qui donnent deux images du même objet, par l'effet de la double réfraction du criſtal de roche: par M. l'Abbé Rochon. - - 37.

Materia alba in epidermide Betulae albae, recens detecta & examini chemico ſubjecta. Auct. Tobia Lowitz. Tab. B - - - - - - - - - - 48.

Experimentorum chemicorum de carbonibus eorumque proprietatibus & uſibus variis continuatio. Auct. Tobia Lowitz. - - - - - 57.

EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce VI. Volume des Actes.*

Claſſe de Mathématique - - - - 79.

Claſſe de Phyſico-Mathématique - - - 93.

Claſſe de Phyſique - - - - - - 101.

Claſſe d'Aſtronomie - - - - - 112.

NOVA

V.

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS VI.

Cum IX. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA

	Pag.
LEONH. EVLER. *De ſingulari ratione differentiandi et integrandi, quae in ſummis ſerierum occurrit* -	3.
—— —— *Methodus generalis inueſtigandi radices omnium aequationum per approximationem* - -	16.
—— —— *Innumerae aequationum formae, ex omnibus ordinibus, quarum reſolutio exhiberi poteſt.* -	25.
—— —— *De curuis algebraicis quarum longitudo exprimitur hac formula integrali:* $\int \frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$. -	36.
—— —— *De duabus pluribusve curuis algebraicis, in quibus, ſi a terminis fixis arcus aequales abſcindantur, eorum amplitudines datam inter ſe teneant rationem.* Tab. I. fig. 1 —— 4. - -	63.
—— —— *De methodo tangentium inuerſa ad theoriam ſolidorum tranſlata.* Tab. II. fig. 1 —— 13. -	77.
—— —— *Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat.* Tab. I. fig. 5. 6. - - - - -	95.
NICOL. FUSS. *Solution du Problème, de trouver un cercle qui touche trois cercles donnés de grandeur & de poſition.* Tab. III. fig. 1 —— 5. -	102.

Pag.

STEPH. RUMOVSKY. *Summatio ſeriei* $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n -$ etc. *denotante* n *numerum quemcunque integrum* - - - - - - 114.

F. T. SCHVBERT. *De proiectione ſphaeroidis ellipticae geographica. Diſſertatio ſecunda. Proiectio ſtereographica horizontalis ſeu obliqua.* Tab. IV. fig. 10 —— 16. - - - - - - 123.

PHYSICO-MATHEMATICA.

LEONH. EVLER. *De motu oſcillatorio penduli circa axem cylindricum, plano horizontali incumbentem.* Tab. V. fig. 1. - - - - - 145.

IAC. BERNOVLLI. *De motu progreſſiuo, rotatorio et oſcillatorio duorum corporum, ope fili ſuper trochleam tranſeuntis connexorum.* Tab. V. fig. 2. - 154.

NICOL. FUSS. *Recherches ſur un Problème de Méchanique.* Tab. VI. fig. 1. 2. - - - 172.

IAC. BERNOVLLI. *De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis.* Tab. V. fig. 3. 4. 5. 185.

NICOL. FUSS. *Remarques ſur un Problème de Statique aſſés connu.* Tab. VI. fig. 3 —— 8. - 197.

PHYSICA.

I. TH. KOELREUTER. *Nouvelles obſervations & expériences ſur l'irritabilité des étamines de l'Epine vinette*, Berberis vulgaris Lin. - - - 207.

CASP. FRIED. WOLFF. *De ordine fibrarum muscularium cordis, Diſſertatio X. De ſtrato ſecundo fibrarum ventriculi ſiniſtri. Pars prima. Huc pertinet Tabula de ordine fibrarum cordis IX. vna*

cum

Pag.

cum praecedentibus octo Tabulis, quae primis iam Tomis Actorum inſertae inueniuntur - - 217.

I. TH. KOELREVTER. *Obſervationes anatomico-phyſiologicae Mytili cygnei Lin. ouaria concernentes* - 236.

BAS. SEWERGYN. *De Schoerlo.* - - - 240.

CASP. FRIED. WOLFF. *De tela quam dicunt celluloſa, obſeruationes.* Tab. VII. fig. 1 — 4. - 259.

BEN. FR. HERMANN. *Mémoire ſur la manière, dont on fait l'acier des mines de fer de la Sibérie* - 276.

ASTRONOMICA.

F. T. SCHVBERT. *Problemata duo aſtronomica.* Tab. VIII. fig. 1. 2. - - - - - 301.

WOLFG. LOUIS KRAFFT. *Suite au mémoire ſur les tables lunaires inſéré au Tome V. des nouveaux Actes* - - - - - - - - 312.

STEPH. ROUMOVSKY. *De eclipſi Solis anno* 1788 *die* $\frac{24 \text{ Maii}}{4 \text{ Iunii}}$ *obſeruata.* Tab. VIII. fig. 3. - - 322.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année* 1788 *ſuivant le nouveau ſtile* - - - - - 330.

Avis

Avis au Rélieur.

Les deux planches A & B appartiennent à la partie hiſtorique de ce volume, & doivent être inſerées à la fin de cette partie pag. 118.

Les huit planches Tab. I. II. III. IV. V. VI. VII. & VIII. ſuivent à la fin de tout le volume, pag. 338.

La double planche: *De ordine fibrarum cordis Tab. IX*, appartient à la page 235.

Bericht an den Buchbinder.

Die Kupfertafeln A und B gehören zu dem hiſtoriſchen Theil dieſes Bandes, und werden zu Ende deſſelben pag. 118. angebunden.

Die acht Kupfertafeln Tab. I. II. III. IV. V. VI. VII. und VIII. folgen zu Ende des ganzen Werkes pag. 338.

Die doppelte Kupfertafel: De ordine fibrarum cordis, Tab. IX. gehört zu pag. 235.

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES

ANNÉE MDCCLXXXVIII.

L'Académie tint vers la fin de cette année une aſſemblée extraordinaire, que Madame la Princeſſe de Daſchkaw avoit fait convocquer pour le Lundi 4 Décembre.

Il s'agiſſoit de remplir l'engagement, que l'Académie avoit pris en 1786, de donner le Prix ſur la queſtion phyſiologique, qu'elle avoit propoſée déjà en 1782, & renvoyée pour la premiere fois en 1784, déclarant qu'elle adjugera ce prix, quand même elle ne recevroit pas une ſolution complette, & qu'elle ſera ſatisfaite pourvu qu'on répande un plus grand jour ſur ſa queſtion, & que ce que l'on avance ſoit du moins de la plus grande probabilité.

L'Académie demanda d'expliquer, par quelle force eſt pouſſée la nutrition dans les parties deſtituées de vaiſſeaux propres à la recevoir, telles que l'épiderme, les ongles, les poils, les cornes &c. Des vingt quatre mémoires, qu'elle avoit reçus jusqu'au terme du dernier concours, fixé an 1er Juillet, ſe ſont diſtingués deux, écrits en allemand & marqués comme il ſuit:

No. 18. *Verſuch einer Beantwortung der von der Kayſerlichen Akademie der Wiſſenſchaften zu St. Petersburg, zum dritten mahl aufgegebenen Preiſsfrage über die Nutritionskrafft*, avec la deviſe: *Aggredior, non tam perficiendi ſpe, quam experiundi voluptate.* CIC. de oratore.

No. 23. *Abhandlung über die, von der Ruſſiſchen Kayſerlichen Akademie der Wiſſenſchafften zum dritten mahl aufgegebenen und bis zum erſten Julii 1788 verlängerten Preiſsfrage*, avec la deviſe: *Felix qui potuit rerum cognoſcere cauſas.*

L'Académie réſolut en conſéquence de partager ſon Prix entre les auteurs de ces deux écrits, & d'accorder en outre les honneurs de l'acceſſit au mémoire françois No. 3. avec l'épigraphe: *Multa renaſcentur, quae jam cecidere*: du quel elle avoit déja fait une mention honorable dans ſon programme publié en 1786.

Comme une indiſpoſition avoit empeché Madame la Princeſſe de Daſchkaw de préſider, en ſa qualité de Directrice, à cette adjudication ſolemnelle de Prix, le Secrétaire fut chargé d'ouvrir en ſon abſence les billets cachetés qui appartiennent aux deux écrits couronnés: ce qui ayant été fait, on trouva que l'auteur du premier, cotté No. 18. eſt M. le Conſ. de Cour Jean Frederic Blumenbach, Profeſſeur à Göttingue, & celui du No. 23. M. Charles Fréderic Born, Profeſſeur à l'Inſtitut Impérial de Chirurgie à Cronſtadt. Tous les autres billets furent brulés en préſence de l'aſſemblée, excepté celui du No. 3. qui fut dépoſé aux archives, & que le Secrétaire n'ouvrit qu'après que l'auteur de cet acceſſit, M. de Grimaud, Profeſſeur royal dans l'Univerſité de Montpellier, s'eſt fait connoître.

L'Aca-

L'Académie publia dans cette même aſſemblée ſolemnelle une nouvelle queſtion de chymie, ſur la nature des ſubſtances colorantes: le terme du concours fut fixé au 1er Décembre 1790, le Prix devant être adjugé en 1791.

M. le Comte Apollos de Mouſſin-Pouchkin, Gentilhomme de la Chambre de S. M. l'Impératrice, avoit témoigné à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, qu'il déſiroit de propoſer un Prix ſur un ſujet de Phyſique concernant le principe électrique, dont il donneroit l'énoncé à l'Académie des Sciences, ſi cette compagnie vouloit permettre que les mémoires envoyés au concours, lui fuſſent addreſſés, & qu'elle voulut ſe charger de leur examen. L'Académie s'y préta d'autant plus volontiers, que la queſtion, qui lui fut communiquée par le Comte, lui parut être d'une grande importance: elle en fit dreſſer le Programme, qui fut publié le 3 Novembre.

Mrs. les Académiciens Kotelnikof, Ozeretskofski & Socolof, continuérent pendant les mois d'été, de donner des cours publics en langue ruſſe: le premier enſeigna les Mathématiques, le ſecond l'Hiſtoire naturelle & le troiſieme la Chymie expérimentale. M. le Conſ. de Cour Ozeretskofski ayant choiſi pour cette année la Minéralogie, Madame la Princeſſe de Daſchkaw envoya à cet uſage une collection conſidérable de minéraux, dont elle fit préſent à l'Académie, & qui en conſéquence fut tranſportée à l'Auditoire du Collège, où ſe donnent ces leçons publiques.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant été informée, qu'il ſe trouvoit aux archives de l'Académie un manuſcript de feu M. l'Académicien Gmelin, l'oncle, ſur les plantes cryptogames

games de la Ruſſie, qui n'a pas encore paru, S. E. ordonna de ſe retirer pour être remis à M. le Conſeiller de Collèges Pallas, qu'elle chargea de le rédiger & de l'enrichir de ſes propres obſervations; à fin qu'il en réſulte un ouvrage complet & précieux, pour être imprimé & publié par l'Académie.

M. le Conſeiller de Cour Ozeretskofski continua de préſenter & de publier en langue ruſſe, les obſervations intéreſſantes qu'il a faites dans ſon dernier voyage autour du lac de Ladoga.

Mrs. les Académiciens Géorgi, Zouyef, & le Sur-intendant des mines Renovance, achevèrent d'arranger le cabinet académique des minéraux & foſſiles, dépoſées en deux ſalles, dont l'une contient les indigènes, & l'autre ceux des païs étrangers. Ils en préſenterent des catalogues faits après le ſyſtème de Wallerius, & y joignirent des remarques hiſtoriques, concernant les diverſes diviſions de ce cabinet.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw augmenta les appointemens de Mrs. les Académiciens, Zouyef, Socolof & Bernoulli.

L'Académie publia dans le courant de cette année le deuxieme & le troiſieme tome de ſes nouveaux Actes. Le ſecond comprend 21 mémoires de Mathématique & de Phyſique précédés de l'hiſtoire de l'année 1784. Le troiſieme contient 23 mémoires, avec l'hiſtoire de l'année 1785, ſuivie de cinq mémoires étrangers.

Mada-

Madame la Princeſſe de Daſchkaw annonça dans la ſéance académique du 20 Octobre, la mort de S. E. Mr. l'Amiral Samuel Greig, commandant en chef de la flotte Impériale dans la Mer Baltique, & Gouverneur du Port de Cronſtadt, Chevalier des Ordres de St. André, de St. Alexandre-Nevski & de St. Anne, Grand-Croix de l'Ordre militaire de St. George de la ſeconde Claſſe, & de St. Wladimir de la premiere Claſſe, Honoraire de l'Académie Impériale des Sciences, &c. enlévé par une fievre bilieuſe, au bord de ſon vaiſſeau Roſtislaw, le 15 Octobre, agé de 53 ans; généralement regretté de toutes les perſonnes qui ont eu des liaiſons avec lui, & particulièrement de l'Académie, à laquelle il a été attaché pendant les cinq dernieres années de ſa glorieuſe vie, ayant été reçu au nombre de ſes honoraires le 18 Août 1783.

Une autre perte que l'Académie a faite dans cette année, & qui lui eſt commune avec toutes les autres Sociétés ſavantes, eſt celle d'un des ſes plus célébres Académiciens externes, M. George-Loüis le Cler, Chevalier, Comte de Buffon, Seigneur de Montbard, Marquis de Rougemont, Vicomte de Quincy &c. &c. Intendant du Jardin & des Cabinets d'Hiſtoire naturelle du Roi de France, de l'Académie françoiſe, Thréſorier perpétuel de celle des Sciences de Paris & membre des principales Sociétés littéraires de l'Europe: né à Montbard en Bourgogne le 7 Septembre 1707, mort à Paris le 17 Avril 1788. Le défunt fut un des ſavans diſtingués du premier ordre que l'Académie reçut au nombre de ſes aſſociés externes, le jour de la célébration du Jubilé démi-ſéculaire de ſa fondation en 1776.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw propoſa le 19 Mai, pour être reçu au nombre des Académiciens externes: M. Fran-

François Daniel, Juris-Conſulte & Hiſtoriographe de S. M. le Roi des deux Siciles à Naples: auteur de l'ouvrage: *I Regali ſepolcri del duomo di Palermo riconoſciuti & illuſtrati*, préſenté à l'Académie le 5 Mai. Comme cette reception eſt une exception à la regle que Madame la Princeſſe avoit fait enrégiſtrer le 5 Février 1784, de ne plus recevoir des aſſociés étrangers avant qu'il n'y ait ſix vacances, S. E. allégua les raiſons qui l'ont déterminé à propoſer ce ſavant Italien, & Mrs. les Académiciens crurent devoir acquieſcer à ſa reception, ſans venir au ſcrutin.

L'Académie ayant demandé & obtenu de Madame la Princeſſe ſon chef, la permiſſion d'augmenter le nombre de ſes Correſpondans titrés, elle reçut au nombre de cette claſſe d'aſſociés & par la pluralité des voix, dans une ſéance tenue le 16 Octobre:

1.) M. Sebaſtien Maillard, Capitaine Ingénieur au Corps du Génie & Profeſſeur de Fortification à l'Académie Impériale des Ingénieurs à Vienne; auteur du mémoire ſur la Théorie des machines à feu, qui a remporté le Prix en 1783.

2.) M. Jacques Fries, Chirurgien-Major à Ouſtioug weliki, avantageuſement connû par ſes obſervations ſur la congélation du Mercure en plein air, & par pluſieurs autres recherches qu'il a communiquées à l'Académie, & dont il a été fait mention aux tomes précédens de ces Actes.

Ouvra-

OUVRAGES

imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, productions de la nature & de l'art, antiquités & curioſités, préſentés ou envoyés à l'Académie.

Le Vendredi 7 Janvier. Sa Majeſté l'Impératrice a envoyé pour le cabinet d'antiquités, une écuelle d'argent, travaillée en boſſe, & une aigrette d'or, trouvées l'une & l'autre dans le Gouvernement de Kolyvan, près du fleuve Karluk, à l'endroit où il ſe jette dans le Katun. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, dirigeant l'Académie, a ordonné d'en faire un deſſin pour être communiqué à M. Bailly; ce célèbre auteur ayant parlé, dans ſes lettres ſur l'Atlantide, des richeſſes de la Sibérie & de l'abondance de ces ſortes d'antiquités qui s'y trouvent enterrées.

M. le Prof. Géorgi a lu un rapport avantageaux, de la méthode de corriger le brandevin commun de ſon odeur déſagréable, propoſée par M. Lowitz. Voyez ſon mémoire inſéré au ſupplement de cette collection.

M. le Conſ. de Cour Lepechin a expoſé une collection de cent diverſes ſemences, que M. le Conſ. de Cour Laxmann lui avoit envoyée d'Irkutzk' pour le jardin académique.

Le 10 Janvier. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour le cabinet d'hiſtoire naturelle, 90 pieces de minéraux & autres foſſiles, que M. Alexandre Raſderiſchin, maître des mines de Nertſchinsk, lui avoit remiſes avec un catalogue, pour être préſentées à l'Académie.

Le même 10 Janvier, le Secrétaire perpétuel des Conférences académiques Euler a lu une lettre de M. le Chevalier de Lorgna, datée de Verone le 1er Août 1787, qui envoie par le canal de M. le Général Mordwinof, Miniſtre de Sa Majeſté l'Impératrice à Veniſe, un tableau peint en cire punique dont M. de Lorgna prétend avoir recouvré la vraie compoſition dans un paſſage de Pline; accompagné des quatre premiers volumes de la nouvelle Société Italienne, que ce même ſavant a fondée & dont il eſt le Préſident: *Memorie di Matematica e Fiſica della Societa Italiana.*

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. Spedicati, Chirurgien-Major de la flotte Impériale: *Theoretiſch-practiſche Beurtheilung des Scharboks*, volume in 8vo traduit de l'italien.

Le 24 Janvier. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. de Lambre, Aſtronome à Paris: *Mémoire ſur l'occultation de Venus, obſervée le* 12 *Avril* 1785, qui ſe trouve inſéré au ſupplement du Tome IVe de ces Actes.

M. le Prof. Fuſs a lu une lettre du Chirurgien-Major Fries, datée d'Ouſtiug le 13 Décembre, qui envoie l'extrait de ſes obſervations météorologiques pour 1787, & qui rapporte que le mercure s'eſt encore trouvé gelé le 24 Novembre, depuis 2 heures après minuit jusqu'à 9 heures du matin, par un froid de 238 degrés de Délisle, qui font 50 degrés de Réaumur.

Le 28 Janvier. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. Joſeph Willard, Vice-Préſident & Secrétaire de la corréſpondance de l'Académie américaine à Boſton, qui envoie de la part de cette nouvelle Académie: *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences to the End of the Year* 1783.

1783. *Vol. I.* 4to *Boſton* 1785. La lettre eſt datée de Cambridge près de Boſton le 25 Septembre 1787.

Le même 28 Janvier. M. le Conſeiller d'État actuel Aepinus a envoyé de la part de M. l'Abbé Rochon: *Explication des uſages, auxquels on peut employer utilement les lunettes qui donnent deux images du même objet, par l'effet de la double réfraction du criſtal de roche.*

Le 31 Janvier. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Comte d'Anhalt, Directeur en chef du Corps Impérial des nobles cadets de terre, une nouvelle édition du ſyſtème figuré des connoiſſances humaines, imprimé en françois, avec la traduction ruſſe des termes techniques à côté.

Le 7 Février. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé le plan & le profil d'un bâtiment déſtiné à conſerver & à purifier les eaux à boire, avec un écrit qui en contient l'explication, & qui lui a été préſenté pour être ſoumis au jugement de l'Académie, par M. Spedicati, Chirurgien-Major de la Marine. M. le Conſ. de Cour Socolof ayant été chargé de le lire, en a porté un jugement avantageux dans une des ſéances ſuivantes.

Le 11 Février. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſ. de Cour Hermann à Cathérinenburg: *Beſchreibung der Permiſchen Salzwercke mit Vorſchlägen zu ihrer Verbeſſerung.* Cet écrit a été traduit en ruſſe & inſéré dans le Journal académique.

Le 21 Février. Le Secrétaire a lu la réponſe très gracieuſe de S. M. le Roi Fréderic Guillaume II. de Pruſſe, à

l'envoi que l'Académie Lui a fait du 1er Tome des nouveaux Actes.

Le 13 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller-Privé Formey à Berlin, le nouveau Programme des Prix propoſés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, pour l'année 1789.

Le 24 Mars. Le Secrétaire a lu un rapport de M. le Conſ. de Cour Hermann, datée de Cathérinenburg le 12 Février, qui envoie pour le cabinet d'hiſtoire naturelle un os foſſile fort remarquable, trouvé au deſſus des minieres d'or de Bereſow.

M. le Conſ. de Cour Socolof a lu ſon rapport, *de methodo Dn. Spedicati depurandi aquas dulces hiberno tempore per gelu & ſubſidentiam.* Voyez ci-deſſus 7 Février.

Le 27 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de Mrs. les aſtronomes de Milan: *Ephemerides aſtronomicae ad meridianum Mediolanenſem ſupputatae ab Angelo de Ceſaris*: années 1788 & 1789.

M. le Conſ. de Collèges Pallas a remis de la part de M. le Conſ. de Cour Hablitzl', Correſpondant de l'Académie à Simpheropol en Tauride, diverſes ſemences pour le jardin botanique.

Le 31 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Comte d'Anhalt: Syſtême général de la ſcience de la guerre, développée dans les parties intégrantes, avec une planche, à l'uſage des nobles cadets du Corps Impérial de terre.

Le 7 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 17 Mars, qui communique une nou-

nouvelle conſtruction pour le Quart-de-cercle & les autres inſtrumens aſtronomiques, inventée & exécutée par M. Troughton.

Le 24 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, pour les cabinets de médailles & d'hiſtoire naturelle, une monnoye chinoiſe d'argent péſant 15 ſolotnics, & trois calcedoines bleues fort rares, trouvées en Davurie, dont elle a fait préſent à l'Académie.

Enſuite le deſſin d'un Parhélie, obſervé à Tomsk dans le Gouvernement de Tobolsk, le 24 Janvier à 10 heures avant midi, que lui avoit adréſſé M. le Lieutenant Général de Kaſchkin.

Le 28 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſ. de Cour Laxmann datée d'Irkoutzk' le 23 Février, qui envoie les obſervations thermométriques faites par ſon fils à Yakoutzk'.

M. l'Académicien Zouyef a préſenté & donné pour le cabinet académique un corne de bouc ſauvage.

Le 1 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'auteur, M. le Docteur Blech à Danzig: *Rede bey der Gedächtniſs-Feyer Hevelii, den 28 Januarii gehalten.*

Le 5 Mai. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part M. François Daniel, Juris-Conſulte & Hiſtoriographe de S. M. le Roi des deux Siciles, un exemplaire proprement rélié de ſon ouvrage in folio intitulé: *I Regali ſepolcri del duomo di Palermo riconoſciuti & illuſtrati. In Napoli* 1784.

Le 12 Mai. M. le Conſ. de Cour Czeretskovski a préſenté de la part de M. Thomin, négociant à Archangel, une déſcription manuſcripte des animaux marins de la mer glaciale, & de leur pêche. Cette déſcription interéſſante a été inſérée dans le Journal académique: Новыя ежемѣсячныя сочиненїя.

Le 19 Mai. Le Secrétaire a préſenté une lettre imprimée d'un Médecin anatomiſte anglois à un de ſes amis, *ſur une collection complette d'anatomies du corps humain, formées au naturel & d'aprés le cadavre, au moyen des pâtes colorées dans toute leur ſubſtance.* Cette lettre eſt datée de Florence le 20 Février 1788.

Le 26 Mai. M. le Prof. Bernoulli a préſenté de la part de M. ſon frère l'Académicien de Berlin, les ouvrages ſuivans de feu M. Lambert, dont il eſt l'éditeur:

Joh. Heinr. Lamberts *gelehrter Briefwechſel: des V Bandes zweyter Theil.*

Deſſelben Logiſche- und Philoſophiſche Abhandlungen. II *Band.*

Le 9 Juin. M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de l'auteur, M. Renovance, Sur-intendant des mines du Kolyvan & Correſpondant de l'Académie: *Mineralogiſch-Geographiſche und andere vermiſchte Nachrichten von den Altaiſchen Gebürgen Ruſſiſch-Käyſerlichen Antheils.* 4to.

Le Secrétaire a lu une lettre du Correſpondant, M. le Profeſſeur & Académicien Bode de Berlin, datée du 29 Mai, qui communique diverſes obſervations aſtronomiques.

Le 12 Juin. M. l'Académicien Bernoulli a lu une lettre de M. l'Abbé de Caluſo, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences de Turin, qui envoie pour être communi-

muniqué à l'Académie, le dernier Programme des Prix propoſés par l'Académie de Turin.

Le 16 Juin. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. le Baron de Nolcken, Miniſtre de S. M. le Roi de Suede, le Programme des Prix propoſés par l'Académie Royale Suedoiſe pour l'année 1789.

Le 30 Juin. Le Secrétaire a remis de la part de la Société Royale des Sciences de Londres: *Philoſophical Transactions of the royal Society of London. Vol. LXXVII. for the Year 1787. Part. 2.*

Le 3 Juillet. M. le Conſ. de Colleges Pallas a remis de la part de l'auteur: *The hiſtory of Sumatra by William Marsden F. R. S. The ſecond edition. London* 1784: & pour le jardin botanique un pacquet de ſemences de 80 eſpèces d'arbres & d'arbriſſeaux de l'Amérique ſeptentrionale, qu'on lui a envoyées de Londres.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. de la Lande datée de Paris le 22 Juin, qui communique les obſervations aſtronomiques les plus récentes.

Le 14 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur: *Ignatius Pickel, Prof. der Mathematik in Eichſtädt, Abhandlung von einem Secunden-Perpendikel einer aſtronomiſchen Uhr, deſſen Länge von der Wärme oder Kälte keine Veränderung leidet.* 4to *Erfurt* 1787.

—— —— il a lu une lettre adreſſée à l'Académie par M. Liehnie, Directeur de l'école normale principale à Prague, & datée du 8 Avril, qui envoie & ſoumet à l'approbation des Académiciens: *Staatiſtiſche und politiſche Aufſätze zum beſten der Staaten und der Menſchheit*, un volume in 8vo.

Le

Le même 14 Août, le Secrétaire a préſenté de la part de l'auteur: *Johann Hieronimus Schröter, königl. Ober-Amtmann in Lilienthal, Beyträge zu den neueſten aſtronomiſchen Entdeckungen: herausgegeben von Johann Elert Bode. Berlin* 1788. 8vo.

—— —— de la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm: *Kongl. Vetenskaps Academiens nya handlingar År* 1786. *Jul.* —— *Decemb. År* 1787 complet, en tout ſix trimeſtres.

Le 18 Août. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris:

Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences année 1785. avec les mémoires de Mathématique & de Phyſique pour la même année.

Connoiſſance des temps à l'uſage des aſtronomes & des navigateurs pour l'année commune 1790.

—— —— de la part de la Société électorale de Météorologie à Manheim, *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni* 1786. 4to.

M. l'Académicien Zouyef a préſenté de la part de l'auteur: *J. G. Koch, Conſil. Aul. Seminarii Praeceptorum Directoris, Tentamen enucleationis hieroglyphicorum quorundam nummorum: Petropoli* 1788. 8vo, ainſi que la traduction ruſſe du même ouvrage par M. l'Aſſeſſeur Eugene Syreitſchikof, imprimée dans le même format.

M. le Prof. Fuſs a lu une lettre de M. le Chirurgien-Major Fries à Ouſtioug-welikoi, datée du 17 Juillet, qui envoie la copie d'une inſcription Syrainique, découverte dans une égliſe ancienne à Voſchemskoi Pogoſt, Paroiſſe de Voſchemsk dans le Gouvernement de Vologdha.

Le

Le 21 Août. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Mrs. de l'Académie, par M. le Docteur Houſſet, & datée d'Auxerre le 18 Juin, qui envoie ſes mémoires phyſiologiques & d'hiſtoire naturelle, imprimés en deux volumes in 8vo; où ſe trouve inſéré un mémoire ſur la nutrition, qu'il avoit envoyé à l'Académie, mais qui n'a pas pu concourir au prix, parceque M. Houſſet s'étoit nommé.

—— —— Il a préſenté de la part des auteurs: 1.) *Obſervations ſur la Phyſique, ſur l'hiſtoire naturelle & ſur les arts, par Mrs. l'Abbé Rozier & Mongez le jeune.* Neuf cahiers: Année 1787. Août —— Décembre: année 1788 Février —— Mai. 2.) *Nouvelles de la République des Lettres par M. de la Blancherie.* Tome VIII. Année 1787. No. 32 — 52.

Le 25 Août. Le Secrétaire a expoſé, pour être remis au cabinet de curioſités, quelques échantillons d'un papier incombuſtible fait de l'amianthe de Sibérie, avec une encre métallique qui ſe noircit dans le feu & s'y conſerve: préſenté l'une & l'aute par M. Régius, établi à Caſan. Madame la Princeſſe ayant chargé M. le Prof. Géorgi de l'examiner, celui-ci en lut à l'Académie un rapport favorable.

Le 28 Août. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'Univerſité Impériale de Moscou, un volume in 4to contenant divers diſcours prononcés par Mrs. les Profeſſeurs de cette Univerſité, à une aſſemblée publique & ſolemnelle, tenue le 30 Juin, à l'occaſion du 26me anniverſaire de l'avénement de Sa Majeſté l'Impératrice au Throne de Ruſſie.

M. le Conſ. de Colleges & Chevalier Pallas a lu une lettre de M. le Prof. Camper, datée de la Haye le 12 Avril & adreſſée à Mrs. de l'Académie, contenant, avec des réflexions,

une gravure à l'eau forte, qui repréſente deux têtes ſquelettées de Rhinoceros d'Afrique & d'Aſie.

Le même 28 Août, M. le Prof. Bernoulli a expoſé un modèle en petit de la machine hydraulique qu'il a nommée Pitotienne, & dont on trouve la déſcription & les calculs au Tome IV[e] des nouveaux Actes. Pag. 158.

Le Secrétaire a lu & remis une lettre circulaire, adreſſée à Mrs. de l'Académie & datée de Philadelphie le 4 Décembre 1787, par M. Jean Churchmann, qui prétend avoir découvert un mouvement périodique des poles magnétiques de la Terre, ſe croyant par conſéquent en état d'aſſigner pour chaque temps les lieux de ces poles, & de déterminer par là, pour chaque point de la Terre, la déclinaiſon de la Bouſſole: de ſorte qu'ayant obſervé ſur mer cette déclinaiſon, avec la latitude de l'endroit où l'on ſe trouve, on en puiſſe réciproquement calculer la longitude.

Le 1 Septembre. M. l'Académicien Zouyef a donné pour le cabinet d'hiſtoire naturelle un fragment d'une dent molaire d'elephant, trouvé près de Twer: il doit ſervir pour completter l'hiſtoire des endroits, où ſe trouvent des pareils oſſemens, & pour découvrir s'il ſe peut, en les analyſant chymiquement, les cauſes qui peuvent avoir concouru à leur conſervation pendant des ſiecles entiers.

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Bibliothécaire Bacmeiſter: *Beyträge zur Lebensgeſchichte des Patriarchen Nicon aus ruſſiſchen Nachrichten zuſammen getragen*, imprimé in 8[vo] à Riga.

Le 15 Septembre. Madame la Princeſſe a fait expoſer le magnifique ouvrage ſur les antiquités d'Herculanum, que S.

S. M. le Roi des deux Siciles a envoyé pour la ſeconde fois en préſent à l'Académie, le premier envoi ayant péri dans un naufrage. Cet ouvrage conſiſte en huit volumes, grand format in folio & proprement reliés: ſavoir

Catalogi degli antichi Monumenti di Ercolano. T. I.
Le Pitture antiche d'Ercolano. Tomo I. II. III. IV. V.
Le Bronzi di Ercolano e contorni inciſi. Tomo I. Buſti. Tomo II. Statue.

Le 18 Septembre. M. l'Académicien Zouyef a remis, de la part de M. le Conſeiller de Cour Laxmann à Irkoutzk', diverſes ſémences pour le jardin botanique.

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. de Magellan à Londres: I.) *Additional experiments and obſervations relating to the principle of acidity, the decompoſition of water and Phlogiſton: by Joſeph Prieſtley.* 4. II.) *An eſſay towards a Syſtem of Mineralogy: by A. Fr. Cronſtedt. The ſecond edition by J. H. de Magellan*, deux volumes in 8.

Le 29 Septembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothéque: *Notices & extraits des manuſcripts de la Bibliothéque du Roi de France. Tom. I.* Enſuite de la part de S. E. M. le Grand-Chambellan de Schouwalof, Дѣянія Петра Великаго, les trois premiers volumes: & de la part de la Société typographique à Moscou, onze divers ouvrages qu'elle avoit publiés jusqués-là.

Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de l'Hiſtoriographe Napolitain, M. François Daniel, qui avoit été reçu au nombre des Aſſociés externes, le 19 Mai.

Le 2 Octobre. M. l'Académicien Zouyef a préſenté de la part de l'auteur, M. le Conſeiller de Cour Toumanski, Correſpondant de l'Académie:

 Пол-

Полное описанїе дѣянїй Его Величества Государя Императора Петра Великаго.

Собранїе разныхъ записокъ и сочиненїй — Государя Императора Петра Великаго ч. 1 — 7.

Зеркало свѣта ч. 1 — 6.

Лѣкарство отъ скуки и заботъ ч. 1. 2.

Достовѣрныя извѣстїя о Алжирѣ.

Описанїе Архипелага.

Новый дѣтскїй мѣсяцословъ.

Le 6 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, de la part de l'auteur, pour la Bibliothéque: Слово о влїянїи наукъ въ общее и каждаго человѣка благоденствїе. Говоренное Петромъ Страховымъ.

Le Secrétaire a préſenté, de la part de la Société royale des Sciences de Londres: *Philoſophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. LXXVIII. for the Year* 1788. *P. I.*

—— il a lu une lettre de M. le Semelier, datée de Paris le 26 Juin, qui envoie ſon *Examen Phyſico-Chymique des principes de l'air & du feu: ou lettres à Mad. la Marquiſe de P*. M**. ſur la chaleur du Globe*: deux volumes in 8.

—— il a communiqué le *Catalogue de la nombreuſe collection d'inſtrumens de Phyſique, Mathematique &c. recueillie par feu M. Allamand, pour être vendue à Leyde le* 17 *Oct. ſeq.*

Le 13 Octobre. M. le Conſeiller de Cour Lepechin a préſenté de la part de M. le Conſeiller de Cour Knaishnin, la collection complette des oeuvres de cet auteur, imprimée en

en 4 volumes in 4. ſous le titre: Собранïе сочиненïй Якова Княжнина.

Le 16 Octobre. M. le Conſeiller de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, une deuxieme ſuite de ſes particularités géographiques ſur la Nova Zemlia ſeptentrionale: Второе продолженïе географическаго извѣстïя о новой землѣ полунощнаго края.

Madame la Princeſſe a envoyé de la part de M. le Grand-Chambellan de Schouwalof, le 4. volume des Дѣянïя Петра Великаго.

Le 27 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Lepecq de la Cloture, datée de Rouen le 25 Juillet, qui envoie pour être préſenté à l'Académie: *Collection d'obſervations ſur les maladies & conſtitutions épidemiques, années* 1763 *à* 1778, *in quatre volumes publiés par ordre du Gouvernement & dédiés au Roi de France: à Paris & à Rouen.* 1776 — 1778.

Le 31 Octobre. M. le Profeſſeur Géorgi a préſenté & lu ſon rapport, ſur l'état actuel du cabinet académique des minéraux, dont il a fini d'arranger les indigénes, conjointement avec Mrs. Zouyef & Renovance.

Le 3 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliotheque de la part de S. E. Mr. le Procureur-Général Prince de Wäſemski, un exemplaire relié de l'Alcoran imprimé en langue & en caractéres tartares, à la typographie du haut & dirigeant Sénat, par le Sr. Schnoor.

Le 10 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Académicien Bode de Berlin, datée du 17 Octobre qui

communique quelques nouveautés aſtronomiques, & qui envoie l'annonce d'un Atlas nouveau, que va publier M. Sotzmann, Géographe de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe.

Le 17 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothéque académique, la traduction ruſſe des élémens de l'hiſtoire de France, par l'Abbé Millot: Начальныя основанïя Французской исторïи, en trois volumes in 8.

Le 27 Novembre. M. le Profeſſeur Fuſs a préſenté de la part de M. le Baron de Paccaſſi, Correſpondant de l'Académie à Vienne; *Verbeſſerung und Zuſätze zu der Abhandlung über eine neue Methode zu integriren.*

Le 4 Décembre. Séance extraordinaire, voyez ci-deſſus. M. le Conſeiller de Colléges Roumovski a remis de la part de M. le Comte de Caſſini, Académicien Aſtronome à Paris: *Extrait des obſervations aſtronomiques & phyſiques faites par ordre de S. M. le Roi de France à l'obſervatoire royal, en l'année* 1787, *ſous le Miniſtère de M. le Baron de Bréteuil.*

Le 11 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Brugnatelli, datée de Pavie le 18 Novembre, qui prie Mrs. les Académiciens de lui communiquer les obſervations & decouvertes, faites en Ruſſie dans la Phyſique & la Chymie, pour pouvoir les inſérer dans le Journal italien: *Biblioteca Fiſica d'Europa*, dont il eſt l'éditeur: il promet en échange d'envoyer à l'Académie tout ce qui lui parvient d'intéreſſant dans la Phyſique. Sa demande fut accordée avec le conſentement de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, ſous condition que l'Académie n'ait point de fraix de port à payer.

Le

Le 18 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller Koelreuter à Carlsruh : *Neue Beobachtungen und Verſuche über die Reitzbarkeit der Staubfäden des gemeinen Sauerdorns.* (Berberis vulgaris. L.)

Le Secrétaire a continué de préſenter chaque mois les obſervations météorologiques, que M. le Conſeiller de Cour & Chevalier Stritter à faites à Moscou, pendant le cours de l'année.

PRIX

PRIX

Propoſé par M. le Comte Apollos de Mouſſin-Pouſchkin, Gentilhomme de la Chambre de Sa Majeſté Impériale.

Pour l'Année 1790.

Quelques multipliées & ingénieuſes que ſoyent les expériences, qu'on a faites jusqu'ici ſur l'Électricité, & quelques importantes & heureuſes que ſoyent les découvertes, auxquelles ces expériences ont donné lieu ſur les loix générales & conſtantes des phénomènes électriques; il faut cependant avouer, qu'on eſt encore peu avancé dans les recherches ſur le Principe même de ces ſurprenans effets, & qu'on n'a qu'une connoiſſance peu-certaine de la nature & des propriétés de cet être qu'on appelle ordinairement *matiere électrique.*

La théorie la plus ſatisfaiſante de l'électricité, connue ſous le nom de ſon illuſtre auteur, M. le Docteur Francklin, ne ſuppoſe qu'une ſeule matiere électrique. Malgré la ſimplicité élegante de cette théorie, & ſon admirable accord avec les phénomènes, il s'en faut beaucoup qu'elle ſoit démontrée avec une entiere évidence: parceque quelques expériences ſemblent indiquer l'exiſtence de deux principes électriques de différente nature, & que de toutes les expériences connües jusqu'ici, il n'en eſt aucune, qui pouvant être expliquée dans la ſuppoſition d'un ſeul principe électrique, ne le puiſſe être également bien dans celle de deux principes.

Mais quand même la théorie du célébre Francklin ſeroit portée au rang des loix le mieux démontrées de la nature;

ture; elle ne donneroit cependant à connoître dans le principe électrique qu'elle met pour baſe, d'autres propriétés qu'une grande élaſticité, en vertu de laquelle les particules du fluide électrique ſe repouſſent réciproquement, & enſuite auſſi un certain degré d'affinité avec la matiere de tous les autres corps, moyennant laquelle il en eſt attiré, en s'inſinuant dans leurs pores avec plus ou moins de facilité & de vîteſſe.

Mais ce fluide électrique, eſt-ce un élément à part, un fluide d'un genre tout particulier? ou eſt-il peut-être la matiere même du feu, ou de la lumiere? ou bien l'électricité & le feu ne ſont-ils que des modifications différentes d'un même principe? & dans l'hypothéſe de deux matieres électriques, l'une n'eſt-elle peut-être pas le phlogiſtique & l'autre l'acide, comme quelques expériences ſemblent l'indiquer? ce ſont toutes des queſtions, dont la ſolution demande encore bien des recherches à faire & tient à une eſpéce fort délicate d'analyſe chymique, mais qui ne manqueroit non plus d'être d'une grande importance pour la Philoſophie naturelle en général, & de conduire à des applications très avantageuſes à pluſieurs égards.

L'expérience principale qui ſemble indiquer que la matiere électrique, ſi elle n'eſt pas le phlogiſtique même, le contient au moins dans ſon eſſence, c'eſt la réduction des chaux métalliques opérée par l'électricité auſſi bien que par l'addition du phlogiſtique dans la procédure ordinaire de la chymie. Cette expérience ſeroit même, comme il ſemble, déciſive & répandroit un grand jour ſur la nature du principe électrique, s'il y avoit moyen de démontrer que le phlogiſtique, qu'on ſuppoſe avoir opéré dans cette expérience électrique la réduction de la chaux métallique, n'a pu autrement être dégagé par l'impétuoſité de la ſecouſſe électrique, ni du corps ſer-

 vant

vant de réceptacle à la chaux, ni de la ſurface des conducteurs, qu'on ſait conduire l'électricité d'autant mieux qu'ils contiennent plus de phlogiſtique, ni enfin d'une autre matiere hetérogéne quelconque qui s'eſt trouvée dans l'air, par lequel a paſſé la commotion électrique.

Il ſemble que les découvertes modernes ſur les eſpéces différentes des fluides aëriformes connus ſous le nom d'airs factices, offrent un moyen inconnu jusqu'alors d'éclaircir cette queſtion importante par de nouvelles expériences. On ſait que celui de ces airs, qu'on apelle air vital ou déplogiſtiqué, joue un rôle trés marqué dans la calcination des métaux & dans la réduction des chaux métalliques, ou'il ſe combine avec les métaux pendant leur calcination & qu'il en eſt degagé pendant la reduction de leurs chaux operée ſans aucune addition du phlogiſtique: on ſait auſſi, que l'electricité préſente un moyen de phlogiſtiquer les différentes eſpéces d'airs, c'eſt à dire, de les réduire au même état, auquel elles ſe réduiſent en ſe combinant avec le phlogiſtique.

En conſidération de ces réflexions & des réſultats interéſſans que des expériences chymiques faites ſous ce point de vüe ſemblent promettre, Monſieur le Comte de Mouſſin-Pouſchkin, zélé pour le progrès des ſciences phyſiques, qu'il cultive lui même avec le plus heureux ſuccès, a conçu le louable deſſein de depoſer à l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersburg, avec le conſentement de ſon Illuſtre Chef, Madame la Princeſſe de Daſchkaw, une ſomme de cinquante Ducats d'Hollande pour être donnée à celui des ſavans ſoit étrangers, ſoit regnicoles, (en n'en excluant pas même les Académiciens de St. Pétersbourg) qui au jugement des Commiſſaires nommés par l'Académie aura le mieux réſolu le Problème ſuivant:

„Dé-

“ Déterminer par une ſuite d’expériences, quel eſt le rôle,
„ que les airs factices, ou l’électricité, ou encore ces
„ airs factices combinés avec l’électricité, jouent dans
„ la minéraliſation, & de conſtater par ces expériences,
„ ſi le principe électrique contient un véritable phlo-
„ giſtique ou non ? “

Les mémoires écrits en langue, ou allemande, ou ruſſe, ou françoiſe, ſeront addreſſés à l’Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg & envoyés au concours avant le premier Juin de l’année 1790. Après ce terme on ne recevra plus de mémoire, quelques cauſes que les auteurs pourroient alleguer en leur faveur. On les prie auſſi de faire enſorte que leurs écrits ſoient liſibles.

Au reſte les auteurs ne mettront point leurs noms à leurs ouvrages, mais ſeulement une ſentence ou deviſe. Ils ſont priés auſſi, d’y attacher un billet cacheté, qui contiendra, avec la même deviſe, leur nom, leurs qualités & leur demeure. Ce billet ne ſera ouvert, qu’au cas que la piece ait remporté le prix.

L’Académie proclamera ſon jugement au commencement de Décembre de la même année.

QVAESTIO
ab Academia Scientiarum Imperiali Petropolitana pro publico anni MDCCXCI praemio propoſita.

Communis fere, antiquorum pariter ac recentiorum, Chemicorum opinio fuit, colores corporum, quibus haec ſe viſibilia praebent, non tam corporibus ipſis, quam potius peculiari alicui ſubſtantiae, ſive principio, mixtionem corporum ingredienti, quod, cum efficiat, vt corpora, radiorum lucis diverſicolorum abſorbeant alios, alios reflectant, hoc ſenſu omni jure colorans principium vocare poſſis, adſcribendos eſſe. Fridericus Hoffmannus imprimis varias de hac re atque egregias obſervationes & annotationes in ſcriptis ſuis chemicis nobis reliquit. Neque in his generalioribus ſubſtitit Chemicorum antiquorum ſagacitas; quin & naturam huius principii colorantis quodam modo declaraverunt, ſulphur appellando id, quod colorem dat corporibus, ſive ſulphuream principio coloranti attribuendo naturam. Nimirum nihil aliud procul dubio per hoc ſulphuris vocabulum intelligunt, quam phlogiſton, cum aliquo ſale & cum terra aliqua conjunctum, ea ratione, ut phlogiſton imprimis hoc ſit ſubſtantiae colorantis elementum, cui cum lumine ſingulare illud commercium intercedat, quod radios coloratos alios abſorbeat, alios reflectat, ut ſal vero phlogiſton figat, & terra tandem pro baſi fixo ſale phlogiſto inſerviat.

Imo etiam ulterius ars chemica progreſſa haud obſcure, unde imprimis diverſitas colorum pendeat, indicare videtur: nimirum a ſale, quo phlogiſton ſolutum figitur. Poſſunt ex

ex uno eodemque corpore, copioſiori inſtructo principio colorante per ſolam diverſorum menſtruorum ſalinorum additionem plures ac diverſi colores produci, non mutato primario ſubſtantiae colorantis principio, quemadmodum in cupro hoc, in ferro, in mercurio, aliisque metallis fieri poſſe notum eſt. Poteſt in ſuccis plantarum coloratis, qui ad tingendos pannos lineos, laneos, ſericeos, aliosque adhibentur, color pro lubitu per varia ſalina addita variari, deſtrui prorſus, iterumque reduci, dummodo mixtio ſubſtantiae colorantis per nimia rodentia non penitus fuerit deſtructa. Et quibus contra corporibus, veluti cretae, parum vel nihil ineſt principii colorantis, ex iis nullus per quodvis menſtruum color produci poteſt.

Uti multa tamen obſcura adhuc, dum in hac re, multa dubia, aut manca, reſtant: pleniorem Academia et accuratiorem totius huius chemicae de coloribus theoriae, explicationem et demonſtrationem deſiderat. Et quaerit imprimis haec:

1.) " Cuius proprie indolis eſt ſubſtantia illa colorans? an
„ recte ſulphur a veterioribus appellata? quid ſimile
„ cum ſulphure communi, quid diverſum ab eo habet?
„ an ad aliud forte corporum mixtorum genus, quod
„ pariter phlogiſto et ſale compoſitum ſit, rectius re-
„ fertur? an ſui generis potius ſubſtantia eſt?

2.) " Cuius naturae ſal ille eſt, quo phlogiſton figitur? aci-
„ daene? alcalinae? an medio-ſalinae? ſi, quod veri-
„ ſimilius, acidae, quale ergo hoc acidum, quo fixum
„ phlogiſton aptum imprimis ad diſſolvendos radios lu-
„ minares, vel, quod idem eſt, ad producendos colo-
„ res, efficitur?

3.) "Cuius generis terra illa, quae praeſertim ad excipien-
„ dum phlogiſton, ſuo ſale fixum, requiritur?

4.) "Unde colorum diverſitas? utrum a diverſa eorundem
„ elementorum ſubſtantiae colorantis mixtione? a diver-
„ ſaque phlogiſti, proportione ſalis figentis, quantitate?
„ an potius cum unum ſcilicet ſimplex phlogiſton tan-
„ tummodo in cunctis regnis naturae dari videatur, ab
„ ipſa, eaque ſola, ſalis figentis diverſitate? vel etiam
„ a diverſitate ſimul terrae excipientis?

5.) "Qualis tandem ſal, aut qualis phlogiſti cum ſale mix-
„ tio ad rubrum in ſpecie colorem, qualis ad caerule-
„ um, vel viridem &c. producendum requiritur? ne-
„ que enim hoc etiam experimentis variis, prudenter
„ inſtitutis, invenire, ſupra vires humanas eſſe Acade-
„ mia arbitratur."

Invitat Academia Scientiarum viros omnium gentium doctos, ut reſponſa ſua et cogitata ante Calendas Decembris MDCCXC. transmittant, quorum ea, quae iudicium Academicorum Petropoli habitantium (quibus nunquam palma Academiae concurrit) caeteris praeſtantiora et adaequatiora declarabit, praemio centum nummorum aureorum, quos vulgo Ducatos Belgicos appellant, condecorabitur.

Extrait

Extrait
d'une lettre de M. Fries, Chirurgien-Major à Ouſtiug-weliki & Correſpondant de l'Académie.

Ouſtiug-weliki, le 17 Juillet 1788.

Ayant fait ces jours-ci un voyage à Iarensk, le thréſorier du Gouvernement M. Popof m'indiqua un endroit, où je trouverois des caractères originaux de la langue Syrainique, que jusqu'ici on s'étoit inutilement donné la peine de découvrir. Je m'y rendis tout de ſuite: c'eſt un village à 40 verſtes de Iarensk, ſur le bord droit de la Witſchegda, nommé Woſchemskoi Pogoſt, ou paroiſſe de Woſchemsk': là ſe trouve une ancienne égliſe qui a été bâtie du temps du fameux convertiſſeur des payens, St. Etienne de Perme, où l'on voit une image de la viſitation d'Abraham nommée Образъ святыя Троицы Живоначальныя. C'eſt au deſſous de cet image & au deſſus de chacun des trois anges, auſſi bien qu'au deſſus d'Abraham & de Sara, qu'on voit des écritures Syrainiques, dont j'ai eu ſoin de copier les traces le plus fidèlement qu'il m'a été poſſible, & que j'ai l'honneur de préſenter ci-joint à l'Académie. **Planche A.**

* * *

On voit bien que les caractéres qui ſe trouvent au deſſus d'Abraham & de Sara déſignent leur noms, d'où l'on découvre les figures des lettres Syrainiques, *a*, *b*, *r*, *m* & *s*; mais les autres caractères n'ont pas pu être déchiffrés jusqu'ici.

En attendant il ſera intéreſſant de trouver ici une notice hiſtorique de cette écriture Syrainique & du St. Etienne, telle que M. le Conſeiller de Cour Lepechin l'a communiquée à l'Académie.

Litte-

Litterarum et ſcripturae Zirenorum auctor fuit Sanctus Stephanus, olim magnae Permiae Epiſcopus. Natus ille erat circa initium Seculi XIV. in vrbe Uſtiug. Patrem habuit Semionem, Eccleſiae cathedralis eiusdem vrbis clericum, matrem vero Mariam. A tenera aetate eruditus litteris Slavonicis, feliciique praeditus memoria, ingenium ſuum aſſidua lectione Scripturae Sacrae et librorum liturgicorum excoluit, vitamque ſecularem reſpuens monaſticam elegit, et Roſtoviae in monaſterio St. Gregorii Theologi religioſo ordini initiatus erat per Abbatem Maximum, tenente tunc ſedem epiſcopalem Arſenio. Ibi ab omnibus curis liber veniamque bibliothecam monaſticam et epiſcopalem, pro tempore ſat bene inſtructam, adeundi conſecutus, totum ſe praecibus ac litteris tradidit; linguam graecam proprio marte ſibi familiarem reddidit, et omni cura ac ſolertia linguam Zirenicam excoluit, cuius primis fundamentis, dum in vrbe patria, quae vicina eſt territorio Permiae, viveret, imbutum fuiſſe veriſimile videtur. Hac in re ſecutus erat exemplum St. Conſtantini Epiſcopi Moraviae, qui litteras Slavonicas Seculo IX. inuenit et ſacros codices in linguam Slavonicam, adiuvante fratre et poſtea ſucceſſore ipſius in Epiſcopatu Methodio, transtulit.

Mox poſt deceſſum St. Alexii Metropolitae totius Rosſiae, qui anno 1378 contigit, ſacerdos factus eſt, conſecrante ipſum Erasmo Epiſcopo Colomnenſi. Jam presbyter et linguae ac ſcripturae Zirenicae peritus, magno flagrabat deſiderio propagandi verbum diuinum inter gentes Permicas idololatriae addictas. Hanc ſuam mentem aperuit antea nominato Epiſcopo Colomnenſi Erasmo, qui tunc vices Metropolitae Moscuae gerebat; a quo laudatus, in incepto confirmatus et benedictione ac litteris mandatoque munitus omnia obtinuit, quae ad conſacrandas ornandasque eccleſias neceſſaria ſunt, ſedes Zirenorum

rum ſolus petit et verbum divinum idiomate Zirenico praedicat. Ineffabili patientia armatus ſuperat omnes contumelias, moleſtias, iniurias, periculaque, et tandem, adiuuante ſummo Numine, quosdam ad religionem chriſtianam conuertit, & horum ope auxilioque templum e trabibus ligneis ad oſtium fluvii Wym, aquas ſuas in Witzegdam exonerantis, extruit, et illud annuntiationi St. Virginis Mariae dicat; in quo liturgiam et reliqua ſacra, ad ritum Graecorum, idiomate Zirenico adminiſtrat. Creſcente in dies numero conuerſorum, tandem omnem gentem Zirenicam gregi chriſtiano aſſociat. Conſtruuntur vbique templa, religio chriſtiana profundas agit radices, et vndique poſtulantur verbi divini miniſtri. Cum vero Moscua, ad cuius ditionem Permia tunc pertinebat, ob longum intervallum, non tam facile erat adeunda conſecrandis, ineunt omnes conſilium, a ſanctoque Stephano expoſtulant, vt metropolim adeat Epiſcopum Permiae petiturus. His deſideriis vt ſatisfaciat vir Sanctus, iter ſuſcipit, Moscuam venit et magnum Moscoviae ducem Demetrium Ioannidem, qui ob reportatam magnam de Tataris trans Boryſthenem ad fluuium Nepriadwa victoriam, Boryſthinenſis (Donſkoy) cognominatus eſt, Metropolitamque Pimenem ſupplicatur, vt genti, nuper chriſtianae religioni addictae, Epiſcopus detur.

Praecibus eius annuentes magnus Moscouiae dux et Metropolita, ſuffragio omnium Epiſcoporum et conuentus eccleſiaſtici, ipſe Stephanus Epiſcopus Permiae deſignatur; nemo enim ſede epiſcopali dignior videbatur illo, qui lucem chriſtianam in hac terrarum parte propagauit, qui tantas moleſtias, calamitates et vitae pericula ob eam perpeſſus eſt, qui improbo labore Slavonicos libros in idioma Zirenicum tranſtulit et qui euerſis idolis templa chriſtiana extruxit. Anno igitur 1383 creatur ille primus Permiae Epiſcopus, et multis a magno Duce et Metropolita cumulatus donis in Permiam redit, ſedemque epiſcopalem in vico, vbi prima chriſtiana eccleſia fundata erat,

 figit,

figit, ac per tredecim continuos annos gregem chriſtianum paſcit, condit templa, et ſacerdotes e gente Permica creat. Tandem ſenio confectus Moscuam denuo petit, vbi anno 1396 decedit; ſceptra Moscuae tenente magno Duce Baſilio Demetride, filio Demetrii Ioannidis, et in Monaſterio Saluatoris committitur terrae.

Succeſſores ipſius, epiſcopi 1.) Eſaias, 2.) St. Erasmus, 3.) Ionas, 4.) Cyprianus, 5.) St. Pitirimus, 6. St. Ionas, qui reliquas magnae Permiae gentes verbo diuino illuſtrauit et religioni chriſtianae addixit, 7.) Philopheus, 8.) Nicon, continuabant verbum diuinum idiomate Zirenico adminiſtrare; ſed tandem, cum intimius commercium Zirenis cum Roſſis intercefferit, et omnes linguam Rutheno-Slauonicam callere inciperent, cultus Dei lingua Slauonica celebrari coepit; ſedes epiſcopalis translata erat in primis anno 1503, regnante magno duce Ioanne Baſilide Wologdam, et Epiſcopi vocabantur Epiſcopi Wologdae et magnae Permiae ſimul; tandem anno 1663, ſceptra totius Roſſae tenente Caeſare Alexio Michaelide Eparchia Wiatcentis conſtita erat cui et Permia adſcripta fuit, litterae Zirenorum in obliuionem venerunt ita, vt, dum has regiones peragrarem, nullibi litteras ſeu characteres ſcripturae Zirenicae detegere potuiſſem; praeter denominationem litterarum et verſionem liturgiae, ſed litteris Roſſicis conſcriptam, quas in III. Tom. itinerarii mei communicaui.

Apographum igitur inſcriptionis exaratae, ad effigiem pictam St^ae^. Trinitatis, quae propriis manibus St. Stephani in templo pagi Woshemskoy, in ditione vrbis Iarensk ſiti, collocata, magni habendum eſt, continet enim illud praecioſas reliquias Zirenorum ſcripturae iam dudum deperditae, et quod Academiae correſpondens Jacobus Fries, vrbis Vſtiug chirurgus primarius communicauit.

Lepechin.

SUP-

SUPPLÉMENT.

MÉMOIRES

préſentés à l'Académie Impériale des Sciences

par des Savans étrangers

&

approuvés dans ſes Aſſemblées.

Explication des uſages auxquels on peut employer utilement LES LUNETTES qui donnent deux images du même objet, par l'effet de la double réfraction du Criſtal de Roche.

Par
M. l'Abbé Rochon.

Préſenté à l'Académie le 28 *Janvier*, 1788.

J'ai fait voir au commencement de l'année 1777, qu'on pouvoit employer avec avantage la double réfraction du criſtal de roche à la meſure des petits angles. Ce micromètre a eu un ſuccès qui a ſurpaſſé mes eſperances. La double réfraction avoit fait exclure de la fabrication des inſtrumens d'optique une ſubſtance dont la limpidité & la dureté offroient des qualités précieuſes: il m'a été infiniment agréable, d'avoir mis à profit cette ſinguliere propriété & d'avoir prouvé aux aſtronomes que ce micromètre avoit une très grande ſuperiorité ſur tous ceux, dont ils ſe ſervent dans les obſervations les plus délicates; mais cette double réfraction m'avoit paru trop petite pour être employée à la meſure des diamètres du Soleil & de la Lune. J'avois été forcé d'avoir recours, pour cette importante détermination, à la double réfraction qui a lieu dans

un ſpath calcaire qui eſt connu ſous le nom de criſtal d'Islande. Cette ſubſtance ne prend un beau poli qu'avec une extrême difficulté, elle eſt très tendre, ſa double réfraction eſt ſi conſidérable qu'on l'apperçoit dès qu'on la poſe ſur de l'écriture. Le criſtal d'Islande eſt en général très transparent; on le trouve toujours ſous la forme de rhomboide; les grands morceaux ſont rares & précieux; en lui donnant la forme prismatique on obtient toujours deux images du même objet, il arrive même quelquefois, que ſous cette forme on ſe procure un beaucoup plus grand nombre d'images. J'ai inutilement cherché le ſens dans lequel la double réfraction ceſſoit d'être apparente; l'achromatisme ne peut pas être ſuffiſant, lorsqu'on fait uſage des prismes de cette ſubſtance.

Tous ces inconvéniens m'ont fait renoncer à employer le criſtal d'Islande dans la fabrication des inſtrumens qui doivent donner la méſure préciſe des angles: mais j'eſpere montrer à l'Académie, que les effets que j'ai reconnu dans cette ſubſtance, ſont bien différens de ceux, que j'ai obſervé dans le criſtal de roche, & qu'ils ſont dignes de ſon attention.

Il m'avoit paru impoſſible de méſurer les diametres du Soleil & de la Lune, par le moyen d'un prisme achromatique de criſtal de roche: c'eſt en étudiant plus particulierement la loi qui a conſtamment lieu dans les deux réfractions de cette ſubſtance, que je ſuis parvenu à faire des prismes achromatiques, capables de méſurer des angles encore plus grands.

Lorsqu'on donne au criſtal de roche la forme prismatique, il y a un ſens, dans lequel la double réfraction ceſſe d'être apparente: ce ſens eſt celui où la direction des rayons eſt ſenſiblement parallèle à l'axe de la pyramide hexagone, qui termine toujours une

une des extrémités, & quelques fois les deux extremités de la criſtalliſation de cette ſubſtance.

Les phénomènes de la double réfraction deviennent d'autant plus ſenſibles, qu'on s'ecarte de ce parallelisme. Or il y a deux ſens opposés, dans lesquels il y a un maximum. C'eſt alors le cas, où en poſant deux prismes égaux de criſtal de roche de maniere que leur ſurfaces extérieures ſoyent paralleles entr'elles, il en réſulte un prisme composé parfaitement achromatique, qui donne une double réfraction deux fois plus forte que celle qui a lieu dans chaque prisme en particulier: par conſéquent la double refraction de chacun des prismes étant de 20 minutes, celle qui réſulte de leur réunion ſera de 40 minutes: mais ſi les deux prismes étoient tailles dans le même ſens, on n'auroit qu'une ſeule image du même objet par la réunion de ces deux prismes, dans le ſens convenable à l'achromatisme. Ces prismes deviendroient par là inutiles à la méſure des angles. M. Herbage qui demeure quai des morfondus, eſt de tous les opticiens celui qui a le mieux réuſſi jusqu'à préſent, à donner aux prismes de criſtal de roche, la taille qui convient le mieux à la méſure des angles, & j'oſe aſſurer que cette conſtruction n'eſt pas ſans difficulté.

N'eſt-il pas ſurprennant qu'un morceau quelconque de criſtal de roche, dont les deux ſurfaces extérieures ſont parallèles, ne donne jamais une double réfraction apparente, tandisque deux prismes égaux & taillés dans le ſens convenable, peuvent donner une double réfraction très conſidérable, quoiqu'ils ſoyent unis de maniere, à ne repréſenter qu'un ſeul morceau, dont les ſurfaces extérieures ſont également paralleles.

Le prisme achromatique qui réſulte de l'union de deux prismes égaux de criſtal de roche, doit ſe mouvoir dans le ſens

de

de l'axe d'une lunette quelconque, dès qu'on le déſtine à la méſure des angles. Ce mouvement ne différe en rien de celui que nous avons propoſé en 1777. La diviſion de la lunette doit être faite ſur le même principe. La maniere de s'en ſervir conſiſte également à mettre en contact les extrémités des deux images qui proviennent de la double réfraction du criſtal de roche. Ce contact s'obtient en avançant où en reculant le priſme dans l'intérieur de la lunette du côté de l'objectif: le mouvement ſera prompt ou lent, ſelon le degré de préciſion que l'on voudra mettre aux obſervations, auxquelles cet inſtrument ſera deſtiné.

Toute lunette armée d'un tel priſme achromatique, meſurera toujours avec beaucoup d'exactitude tous les angles qui ſeront compris depuis zéro juſqu'à l'angle donné par la double réfraction du criſtal de roche: cet angle peut-être de 40 minutes, ſi le criſtal de roche eſt taillé de la maniere la plus avantageuſe. On doit préférer le criſtal de roche de Madagascar à celui d'Europe, parcequ'il eſt plus homogène & plus diaphane.

On aura toujours pour échelle des angles qui ſeront donné par la double réfraction & la longueur focale de l'objectif. La lunette à priſme peut être employée à la ſolution des queſtions ſuivantes:

Premiere Queſtion.

La grandeur d'un objet étant connue, déterminer ſa diſtance?

On mettra pour cela en contact les deux images de l'objet, données par le priſme, en faiſant mouvoir l'index le long de la regle qui porte le priſme. Cette regle a deux diviſions dont l'une indique les minutes & les fractions de minutes, l'au-

l'autre montre le rapport qui a lieu entre le diamètre de l'objet & ſa diſtance. Je ſuppoſe que l'objet qu'on regarde dans cette lunette ſoit un homme: on ſait que la hauteur moyenne de l'homme eſt de cinq pieds deux pouces, on verra à cauſe de la proprieté de la double réfraction du criſtal de roche, deux images de cet homme, on diſpoſera la lunette de manière que les deux images feront dans la même ligne verticale; alors en faiſant mouvoir l'indicateur, on obſervera de mettre en contact parfait les pieds de l'image ſupérieur avec le haut de la tête de l'image inférieur.

Si l'index ſe trouve vis-à-vis du nombre 229, je concluerai que la diſtance de mon oeil à l'homme que je regarde, eſt égale à 229 fois la diſtance de cinq pieds deux pouces. Cette diſtance ſera donc dans ce cas de 1183 pieds 2 pouces. La ſeconde diviſion qui eſt ſur la regle, indiquera, que l'angle ſous lequel je vois cet homme eſt de 15 minutes.

On ne peut pas ſans doute ſe flatter, de déterminer par ce moyen la diſtance avec un grand degré de préciſion; mais il eſt beaucoup de cas, où cette préciſion n'eſt pas importante.

Par exemple, s'il s'agit de connoître la diſtance où l'on eſt d'un Bataillon, on connoit à très peu près d'avance la grandeur moyenne des hommes qui le compoſent, on ne peut gueres ſe tromper que d'un pouce ou d'un pouce & demi à peu prés; c'eſt à dire moins que de la ſoixantieme ou la quarantieme partie de la grandeur de l'objet & par conſéquent de ſa diſtance. La grandeur des objets qui ont des dimenſions à peu près connues, tels ſont les différentes eſpèces d'animaux, les moulins & tous les batimens dans leſquels on

peut obſerver certaines regles d'architecture qui ſont peu ſuſceptibles de variation. Tous ces objets, de quelque nature qu'ils ſoyent, peuvent ſervir & m'ont ſervi ſouvent, à déterminer des diſtances conſidérables & inacceſſibles, avec une célérité ſurprenante, par le moyen d'une lunette portative à priſme, à la quelle il ne faut pas de ſupport pour prendre les angles avec une grande préciſion.

Lorſqu'on a beſoin d'avoir les diſtances avec plus d'exactitude, il faut employer des objets d'un diamètre bien déterminé. C'eſt par ce moyen qu'en ſuivant les bords d'une riviere, on peut en obtenir la largeur dans tous les points: cette détermination eſt utile. Il ſuffit d'obſerver le long des bords de la riviere, un objet du diamètre d'un ou de pluſieurs pieds, ſelon que la riviere aura plus ou moins d'étendue. Cet objet doit être porté le long de la rive oppoſée, par un homme qui doit ſuivre tous les mouvemens de l'obſervateur, de maniere qu'il ſe trouve toujours placé relativement à lui, dans le vrai lieu de la larguer de la riviere, au moment où ſe fait la méſure.

Les marins peuveut également faire uſage de cette lunette, dans tous les cas où quelques dimenſions d'un objet éloigné leur ſeroient connues.

J'ai déja remarqué que ſi les phares avoient la figure d'une croix dont les dimenſions ſeroient fixes & connues des navigateurs, la lunette à priſme ſerviroit à faire connoitre la diſtance du vaiſſeau au phare & ſa poſition par rapport à la côte. En éffet la brauche verticale de la croix formera un angle, d'où il réſulte une évaluation de la diſtance qui ſuffit aux béſoins de la navigation: quant à la poſition du vaiſſeau par rapport au phare, c'eſt l'angle formé par la branche horizontale

zontale de la croix qui la détermine, dés que la diſtance eſt connue. Car l'angle horizontal ſera d'autant plus grand que le vaiſſeau approchera d'avantage de la perpendiculaire aux branches horizontales de la croix.

Nous croyons qu'il faut donner aux phares une certaine étendue & à la lumiere des réverbères une grande activité, âfin que les marins puiſſent les appercevoir à une diſtance aſſez conſidérable de la côte, pour échapper aux écueils dont elle peut être environnée. Deux réverbères qui ſe touchent ne ſe verront pas d'auſſi loin que s'ils ètoient éloignés de quelques toiſes: cet effet depend de la nature de l'organe de la vue. M. de Fourcroi, directeur au corps royal du genie, a fait à Calais un grand nombre d'expériences qui prouvent la néceſſité de donner aux objets une certaine étendue, pour les rendre perceptibles.

Nous nous ſommes ſervis avec avantage de ce micromètre, pour méſurer les diamètres du Soleil & de la Lune. Nous l'avons employé avec ſuccès à la determination de la hauteur des principales montagnes de le Lune. Nous nous occupons maintenant à déterminer la grandeur des taches les plus remarquables de cette planete.

Mais nous croyons devoir recommander l'uſage de cette lunette dans les obſervations des éclipſes de Soleil & de la Lune, parcequ'elle peut donner à tous les inſtans la grandeur de la partie eclipſée.

Ce micromètre nous avoit donné en 1777, l'applatiſſement de Jupiter, & les diamètres de Saturne & de ſon anneau à une dixieme de ſeconde.

Seconde Queſtion.

La diſtance d'un objet étant donnée, déterminer ſa grandeur.

Cette queſtion eſt abſolument l'inverſe de la premiere: car la grandeur de l'objet eſt toujours égale à la diſtance diviſée par le nombre qui eſt déſigné par l'index.

Cette détermination pourra ſe faire avec beaucoup de préciſion & une très grande promptitude, toutes les fois que l'on aura une carte d'un pays, dreſſée avec un peu de ſoin. C'eſt ainſi que j'ai déterminé de l'hotel du cabinet de phyſique du Roy à Paris, la grandeur de la boule du dome des invalides, que j'ai trouvée de quatre pieds de diamètre.

Troiſième Queſtion.

La grandeur & la diſtance d'un objet étant inconnues, déterminer ſa grandeur & ſa diſtance.

Je ſuppoſe que l'objet dont je veux connoitre la diſtance, faſſe avec mon oeil un angle de trente minutes. Lorsque j'approcherai de cet objet en ligne directe, l'angle augmentera, mais cette augmentation ſera toujours proportionelle à l'éloignement de l'objet.

Je me rapprocherai donc de cet objet, de maniere qu'à la ſeconde ſtation l'angle ſoit de trente & une minutes: cette différence ſera plus que ſuffiſante, pour me donner dans les cas ordinaires la diſtance & la grandeur de l'objet.

Je méſurerai enſuite l'intervalle qui ſépare les deux ſtations, en laiſſant à la premiere ſtation un objet d'un diamètre déterminé ſelon la premiere queſtion. Suppoſons que cet intervalle ſoit de dix toiſes & que le premier angle ſoit de trente minutes & le ſecond de trente & un; j'aurai toujours la diſtance

ſtance en multipliant dix toiſes par trente & un & en diviſant le produit par la difference qui a lieu entre les deux angles. La diſtance ſera donc dans cette ſuppoſition de 310 toiſes.

La diſtance étant connue par ce moyen, on déterminera le diamètre de l'objet, par la méthode que nous avons donnée.

La théorie de cet inſtrument eſt expoſée avec beaucoup plus de détail, dans un ouvrage qui a pour titre: Recherches ſur la phyſique & ſur la mécanique, par M. l'Abbé Rochon, chez Barrois l'ainé, libraire, quai de la vallée.

Nous obſerverons ſeulement ici que quoique les deux images produites par la double réfraction du criſtal de roche ſoyent dans les bonnes lunettes ſenſiblement d'égale force, cependant l'image la plus élévée paroitra toujours la plus éloignée, de ſorte que les aſpects des images paroitront plus ou moins éclairés, ſelon la poſition du priſme & la nature du fond ſur lequel on les rapporte. C'eſt pourquoi lorsqu'on obſerve des objets terreſtres, on doit préférer la poſition horizontale des deux images à la poſition vreticale; toutes les fois qu'on peut d'ailleurs employer indifféremment ces deux poſitions.

Cet éffet a généralement lieu ſur terre, & non dans le ciel. Au reſte cette illuſion ne nuit pas à la préciſion & quoiqu'il ſoit un peu plus difficile d'eſtimer le contact des objets verticaux que celui des objets dont la poſition eſt horizontale, cependant on parvient aiſément avec un peu d'habitude à ſe procurer le même degré de préciſion dans les deux cas.

Les inſtrumens à réflexion qui ſervent aux marins à la méſure des angles, donnent ſur terre la même illuſion.

f 3 Niveau

Niveau de pente de nouvelle conſtruction.

On ſait combien il eſt utile dans la prâtique du nivellement, d'avoir avec préciſion l'elevation des objets, ou leur depreſſion, par rapport à l'horizon; mais tous les moyens qui ont été employés jusqu'à préſent n'ont pas donné le degré d'exactitude qu'on doit exiger dans des opérations délicates: c'eſt par cette raiſon qu'on fait fort peu d'uſage des niveaux de pente ordinaire. Celui que j'ai propoſe à l'Academie & qui a été exécuté par M. le Noir, artiſte habile, eſt fondé ſur un principe qui ſurpaſſe en préciſion l'opération même du nivellement. En effet j'employe à cet uſage, une lunette à laquelle eſt adapté un niveau à bulle d'air, dont le parallelisme rélativement à l'axe de l'objectif puiſſe être facilement rectifié, par une vérification qui eſt semblable à celle de toutes les lunettes à niveau, dont les ingénieurs ſe ſervent; mais ce qui eſt particulier à l'inſtrument que je propoſe, conſiſte dans le mouvement d'un prisme achromatique à ſimple réfraction le long de l'axe de la lunette. Le mouvement de ce prisme donnera les angles de dépreſſion & d'élévation des objets par rapport à la direction horizontale, pourvuque ces angles ne ſoyent pas conſidérables. Lorsqu'on juge qu'il peut être utile, d'avoir des angles d'élévation & de dépreſſion plus grands, on peut adopter la conſtruction ſuivante.

La piece principale de l'inſtrument qui doit ſervir à la méſure de ces angles, eſt toujours un prisme achromatique compoſé de Flintglaſs & de Crownglaſs, dont la réfraction abſolue ſera de cinq degrés, âfin que ce prisme puiſſe donner deux fois tous les angles compris depuis la ligne hori-

horizontale juſqu'à cinq degrés d'élévation, & tous les angles de dépreſſion depuis cette même ligne horizontale juſqu'à cinq degrés au deſſous. Mais pour obtenir cet effet, il faut que le priſme ſe meuve circulairement ſur ſon centre devant l'objectif de la lunette, & qu'il puiſſe faire la révolution entiere des trois cent ſoixante degrés: il faut donc que le priſme ſoit enchaſſé dans des anneaux qui ayent deux mouvemens circulaires & indépendans. Il faut encore que ces mouvemens ſoyent concentriques & donnés par une vis ſans fin. Le centre du priſme achromatique doit répondre ſenſiblement à l'axe optique de la lunette à niveau, les deux anneaux ſeront diviſés en degrés, & ſub-diviſés en minutes par un nonius. La poſition du priſme qui ne cauſe aucun dérangement à la direction horizontale, ſera connue par un petit niveau attaché ſur un des anneaux mobiles. Les angles d'élévation & de dépreſſion des objets par rapport à la direction horizontale ſeront comme les ſinus des arcs qui ſeront indiqués par le mouvement circulaire du priſme.

MATE-

MATERIA ALBA IN EPIDERMIDE BETVLAE ALBAE

recens detecta et examini chemico ſubjecta. (*)

Auct. *Tob. Lowitz.*

Conuent. exhib. die 5 April. 1790.

§. 1.

Accidit forte fortuna menſe Martii anni 1787, vt, ligni Betulae fruſtum ſitu erecto igni, quo ſiccaretur, adpoſitum dum intuerer, materiam in eius cortice obſeruarem albiſſimam lanuginoſam, quae microſcopio viſa vegetationem exhibebat criſtallinam tenuiſſimam, ramis mirum quam ſubtilibus criſpatam, et innumeris diſtinctam punctis albis et floccidis, ex quibus ramificationes tenerrimas admirabili naturae luſu ex totidem quaſi centris vndequaque diuergere vidi. Artificio ſubſtantiam illam iuſto caloris gradu pro lubitu producendi poſt plura tentamina ex voto potitus, elegantiora eius ſpecimina, (quae ſorti quidem, quam artificio, magis vtique deberi didici, magna enim in eiusmodi criſtalliſationum forma exte-

(*) Nou. Act. Tom V. p. 41. promiſit auctor, diſſertationis ſuae, quam Academiae obtulit, primae ſe hoc Tomo daturum verſionem latinam Cum vero haec diſſertatio complura contineat, quae in ſcriptis ſuis ſubſequentibus multo expoſuit vberius; non niſi ea, quae ad ſingularem iſtam materiam in corticis Betulae albae epidermide ab ipſo detectam pertinent, ex diſſertatione iſta hic excerpere ipſi viſum fuit.

exteriori conſpicitur varietas), tabulis duabus incluſi vitreis, tanto a ſe inuicem interuallo diſtantibus, quanto opus erat, ne tenerrima vegetationis textura vitri preſſione aut contactu laeſa detrimentum caperet. Tria eiusmodi ſpecimina Tab. B. exhibet.

§. 2. Elegantia non minus, quam nouitate rei incitatus methodum, tantam huius ſubſtantiae copiam quanta chemico eiusdem examini ſufficeret parandi, vt reperirem, omnem quam potui operam dedi. Principio eam, florum Benzoes ad inſtar, ex cortice Betulae, retortae immiſſo, deſtillatione ſicca parare tentaui, ſed fruſtaneo prorſus labore; praeter conſuetas enim ſubſtantias phlegma nimirum acidulum et oleum ſpiſſum empyreumaticum, hac methodo obtinui nihil. Ad eam igitur, quam caſus primo obtulit, viam regreſſus, ſubſtantiam illam optimo cum ſucceſſu ſequenti modo parari poſſe reperi: Ligni Betulae albae fruſta, cortice et alba epidermide adhuc veſtita, verticali ſitu igni admoueantur ad eam vsque diſtantiam, vt vapores eructent, neque tamen epidermis tenerrima ignem capiat; breui poſt tempore corticis ſuperficies vegetatione criſtallina induitur, quam chartulae ope colligere licet, modo, ne eodem quaſi, quo oritur, momento in auras abeat, omnis aëris motus euitetur; ſiquidem tantilla eſt huius materiae denſitas, vt vitrum, libram integram aquae quod capit, octo materiae iſtius granis totum repleatur.

§. 3. Obtenta hoc modo ſubſtantiae huius ſufficiente copia, examen eius chemicum et experimenta varia cum aliis quam plurimis lignorum generibus inſtituta, me ſequentia docuerunt.

a) Materia haec criſtallina non niſi ex Betula alba et quidem non niſi ex epidermide eius obtinetur; nec lig-

 num

num Betulae cortice priuatum, neque ipſe cortex epidermide orbatus eam largiuntur.

b) Saporis eſt nullius.

c) Prunis iniecta placide conſumitur, fumo ſuauis odoris. Cuſpide cultri igni candelae admota incenditur flammula lucida. Cochleari argenteo impoſita ad candelam in liquorem aquae ſimilem, ad margines tamen breui poſt oleoſum et fuſci coloris abit.

d) Octo eius grana validae et diuturnae coctioni cum aqua deſtillata ſubieci, quam poſtea filtratam reagentibus, ſolutione nimirum lunae, mercurii viui, terrae ponderoſae nitratae, ſachari ſaturni, acidi ſachari, hepatis ſulphuris, ſucci heliotropii, et aqua calcis examinaui, nec ſubſtantiam illam vllum cum aqua conſortium iniiſſe reperi; ita vt ſalua forma eius criſtallina, eam tamen ſalibus annumerare non liceat.

e) Alcali fixum vegetabile, tam aëratum quam cauſticum, in ipſa adeo coctione, effectu in eam nullo gaudent.

f) Ab oleo vitrioli citiſſime placideque ſoluitur; ſolutio haec ſi aquae guttatim inſtilletur; guttulae, forma ſolida ad inſtar reſinae, fundum petunt, moxque in ſuperficie albeſcunt, et digito ſub aqua in puluerem album ſe teri patiuntur.

g) Cum ſpiritu nitri fumante materia haec leuiter efferueſcit; adfuſo inſuper oleo vitrioli, vehemens oritur efferueſcentia cum inſigni calore et rubris vaporibus; quae quidem in corporum oleoſorum cum ſpiritu nitri fumante connubio conſueta ſunt phaenomena. Materia ſpu-

ſpumoſa liquori ſupernatans, aquae immiſſa, initio mollis, breui tempore indureſcit et fragilis euadit.

h) In naphthis, aceti et vitrioli, facillime ſoluitur.

i) Olea tam aetherea quam pinguia eam aggrediuntur, imprimis accedente calore.

k) Alcoholis vini vncia vna, materiae huius criſtallinae quatuor, immo accedente calore ſex grana ſoluit; ſolutione hacce ſaturata filtrataque et refrigerata, ea materiae noſtrae criſtallinae pars, quae caloris adminiculo ſoluta fuit, denuo in criſtallos tenuiſſimas concreſcit; alcohol inde gelatinae quaſi formam induit, aliqua vero concuſſatione fluiditatem denuo recipit, et materia lanuginoſa ex ſolutione ſeparata innumerabili ſpiculorum tenuiſſimorum multitudine conſtans, ſub forma praecipitati albi fundum petit.

l) Tincturae ſucci heliotropii ſolutio haec ſpirituoſa rubedinem quidem aliquam conciliat, neque tamen inde de acida materiae noſtrae criſtallinae natura concludi quidquam poteſt; purum enim alcohol idem efficere et ex ſucco heliotropii rubram extrahere tincturam, vidi; immo ſolutionem hancce ſpirituoſam, ſi probe materia noſtra criſtallina ſit ſaturata, tincturae heliotropii, ſaluo plane colore coeruleo, addi poſſe obſeruaui.

m) Hepatis ſulphuris in alcohole vini ſolutio, affuſa ſolutione materiae criſtallinae ſpirituoſa (*k*), neutiquam mutatur.

n) Aqua affuſa, materia noſtra criſtallina ex alcohole, quo fuit ſoluta, praecipitatur.

o) Grana 40 materiae huius ex retorta deſtillationi ſiccae ſubieci. Eodem propemodum ignis gradu, quo alcali fixum acetatum, haec quoque materia in fluorem abit absque vlla efferueſcentia; mox deinde, aucto igne, in inferiore parte roſtri retortae pulueris albicantis non nihil apparet, quod tamen breui diſparet; oleo, Terebinthinae ad inſtar tenaciſſimo, ſtatim et continuo, vsque dum retortae fundus igne rubeſceret, ſubſequente. Abſoluta operatione, in recipiente 5 grana phlegmatis, aquae inſtar limpidi, acidique ſaporis et 18 grana reſinae, colore et pelluciditate ſuccino rubro aemulae, odoris haud ingrati, inter digitos friabilis fere, et, dum prunis immititur, eundem ac ipſa materia criſtallina odorem ſuauem ſpirantis reperi.

Retortae pars interna obducta fuit fuligine, et in fundo ſex grana carbonis nigri deprehendi, e quibus calcinatione granum vnum cum dimidio obtinui cineris albi, qui, adfuſo acido nitri, magna ex parte ſoluebatur, et adiecto deinceps ſolutioni acido vitrioli, pars ſoluta ſub calcis vitriolatae forma fundum petebat. Salis lixiuioſi fixi in cinere hoc ne veſtigium quidem detegere potui. Sequitur hinc, partes conſtitutiuas fixas materiae noſtrae criſtallinae eſſe terras calcaream et vitreſcibilem.

§. 4. Cognitis licet hac ratione partibus conſtitutiuis, nec non proprietatibus primariis materiae huius criſtallinae: cuinam tamen corporum naturalium generi annumeranda ea ſit, prorſus me dubium haerere fateor; an ſalinis? at vero, ab externo habitu ſi diſceſſeris, caret ea reliquis ſalium proprietatibus, nec aqua ſoluitur; an reſinis? fauet ſane huic opinioni eius ſolubilitas in naphthis, oleis et alcohole vini; fauet eius in-

inflammabilitas; fauent inprimis conſtitutiuae partes, deſtillatione ſicca obtentae, iis reſinarum perſimiles; at refragantur aliae haud nullius momenti qualitates, non forma modo externa, ei ſalium ſimillima, ſed id imprimis, quod materìa haec cum alcali cauſtico conſortium omne reſpuit, et quod menſtruorum modo dictorum copiam longe maiorem, quam reſinae, iis vt ſoluatur, poſtulat.

Hisce omnibus probe perpenſis, ita ſentio, vt concretum hocce memorabile dicam eſſe *reſinam*, *acidi cuiusdam vegetabilis intermedio*, *ſingulari aliqua modificatione ſub ſalis habitu laruatam.*

§. 5. Sciendi cupidus, ſubſtantia haec criſtallina habitetne iam in ipſa epidermide Betularum, an ignis potius productum ſit, particularum eam conſtituentium, ſub vaporum forma igne expulſarum, concurſu formatum, ſequentia inſtitui experimenta:

Epidermidis corticis Betulae tenuiſſimae drachmam vnam et dimidiam cum 7 libris aquae purae coctioni expoſui violentae, partes aqua ſolubiles vt extraherem, quarum grana quinque ſub extracti nigri forma obtinui. Ex corticis cuticulis, quae probe excoctae colorem ſuum album ſeruabant incolumem, exſiccatis et digeſtioni cum alcoholis vini 5 vnciis per bihorium in arenae balneo expoſitis, tincturam obtinui claram ſubflauam, quae refrigerata ſenſim ſenſimque euaſit turbida et noctis interuallo tenue albumque ſedimentum dedit; relictasque poſt digeſtionem cuticulas colore ſuo albo prorſus orbatas reperi. Abſtracta per deſtillationem a tinctura modo dicta maxima alcoholis vini parte, fluidum remanens moderatiſſimae euaporationi ſubieci, quo facto, 20 grana conſecutus ſum materiae ſubflauae, puluerulentae, naturae criſtallinae et omnibus ſupra

dictis proprietatibus praeditae, quas in ipſa materia noſtra criſtallina ignis ope obtenta obſeruaui. Ex quo quidem manifeſtis indiciis patere mihi videtur, materiam iſtam eſſe reuera partem conſtitutiuam epidermidis corticis Betulae, nec ignis in ea formanda eſſe aliam partem, niſi quod criſtalliſationis eius adminiculum ſit.

Atque hoc loco neque id ſilentio praetermittendum eſſe videtur, cuticulas, de quibus hoc paragrapho ſermo fuit, aqua excoctas, et furno probe ſiccatas adeo fuiſſe electricas, vt manibus aliisue corporibus non electricis pertinaciter et tanta vi adhaererent, ac ſi penitus adhuc fuiſſent madidae.

§. 6. Cum materia haecce criſtallina non niſi ex corticis Betulae epidermide obtineri queat; hanc ipſam materiam pulchri et albiſſimi, quo Betulae ſtirpes gaudent, coloris eſſe cauſſam, nata mihi ſuſpicio eſt; cuius rei veritatem experimentis ſequentibus extra omne dubium mihi poſuiſſe videor:

a) Me obſeruante cortex Betularum colorem ſuum album materiae cuidam debet albiſſimae, quae cuicunque epidermidi, cuius 24 ſtrata ſibi ſuperpoſita numeraui, in ſuperficie ſuperiori pollinis ſubtiliſſimi forma tam leuiter adhaeret, vt leui digitorum tritu detergi poſſit.

b) Epidermidis albiſſimae in tres partes diſſectae, vnam aquae, alteram naphthae aceti, tertiam alcoholi vini immerſi, vt explorarem, vtrum fluida haec in materiam modo dictam albam, qua tegitur epidermis, eodem modo ſe ſint habitura, ac in illam, quae caloris adminiculo criſtalliſatur. Experimenti euentus reuera opinionem meam comprobauit; ſiquidem aqua nullum plane in eam effectum exſeruit, naphtha autem eam quam

quam citiſſime, alcohol vini paulo tardius, ſoluit ita, vt epidermis colore albo prorſus deſtituta et pellucida relinqueretur.

c) His obſeruatis, naphtham et alcohol vini ad ſaturationem vsque materia iſta alba impraegnare tentaui, immergens iis continuo nouam epidermidem, donec color albus cuticularum, quas vltimo iis immerſi, illibatus remaneret, quo facto, in ſolutionibus ambabus perinde, ac in ſolutione materiae albae criſtallinae (§. 3), ſpiculorum hinc inde natantium colores prismaticos exhibentium multitudinem microſcopio aduerſus ſolem conſpexi: id quod mea quidem ſententia euidentiſſimo eſt documento, materiam hanc albam puluerulentam, cui ſtirpium Betulae albus ille color debetur, et materiam albam iſtam vi ignis criſtalliſatam vnam eandemque eſſe ſubſtantiam.

d) Solutione naphthae adminiculo facta et in cochleari argenteo calore modico ad ſiccitatem vsque euaporata, in cochleari remanebat ſoluta illa materia alba, forma pulueris albi, cuius natura criſtallina oculis nudis cognoſci potuit. Idem in ſolutione materiae ignis ope criſtalliſatae obſeruaui.

e) Affrictu leni puluerem album epidermidis Betulae deterſi mediante ſerici nigri fruſtulo, quod deinde tanto ignis calori expoſui, puluiſculus albus ei adhaerens vt vaporum forma auolare inciperet, quo facto, in ſerici ſuperficie materiae albae, hac in diſſertatione deſcriptae, deprehendi vegetationem criſtallinam prorſus

ſus ſimillimam; quo vnico experimento id, quod hoc paragrapho aſſerui, certo certius confirmatur.

Atque haec quidem ſunt, quae de hac materia detegere mihi licuit, quaeque chemicis eo magis confido fore haud ingrata, cum qualiacunque haec experimenta mea ad producti naturae hucusque ignoti vnique Betulae albae proprii cognitionem aditum nobis aperuerint.

EX-

EXPERIMENTORVM CHEMICORVM
DE CARBONIBVS,
eorumque proprietatibus et vſibus variis continuatio.

Auctore *Tobia Lowitz.*

Conuent. exhib. die 29 April. 1790.

Poſtquam in ſuperiori mea de eodem hoc argumento diſſertatione, quam T. V. Nov. Actor. inſerere Ill. Academiae placuit, de chemicis meis circa carbones laboribus generatim ſatis dixi; quae ab eo inde tempore detegere noua mihi contigit, ſecundum ipſum experimentorum ordinem hic ſuccinctis quaſi aphorismis complecti licebit, quorum objecta vt in fronte notarem, rerum copia et varietas poſtulare viſae ſunt.

Acetum vini.

§. 1. Acetum vini crudum in cucurbita vitrea, veſica bubula clauſa, cum carbonum puluere coctum, colorem flauum prorſus mutauit in album aquae ſimillimum.

Terra foliata tartari.

§. 2. Mediante aceto hoc, quod modo dicta ratione (§. 1.) colore ſuo priuaueram, terram foliatam tartari praeparare, fruſtraneo ſucceſſu ſuſcepi, quae, omni licet opera adhibita, et adiecta magna vi pulueris carbonum, tamen nunquam

quam non nacta eſt extracti formam, nigram illam et empyreumaticam; vnde ad obtinendam terram foliatam tartari albam, acetum neceſſario deſtillari antea debere, perſpicuum eſt.

Mel.

§. 3. Obſeruata a me nonnulla circa mellis depurationem phaenomena ſequentibus continentur:

a.) Mel ſufficiente dilutum aquae copia, dum coquitum cum puluere carbonum; peculiaris odor percipitur, isque maxime ingratus.

b.) Hydromel, ſi addita ipſi pulueris carbonum quantitas iuſto minor hincque deſtruendis omnibus mucoſis eiusdem partibus impar ſit, nigricantis coloris et ſemipellucidi, quantumuis filtretur exactiſſime, tenaciſſimum eſt, quo priuari ſe non patitur, tantam niſi adiicias pulueris carbonum vim, vt dictae partes eius mucilaginoſae penitus deſtruantur.

c.) Reſiduus poſt mellis depurationem carbonum pulvis, larga aquae quantitate ſi elixiviatur, ſimilem (litt. *b.*) aquae conciliat colorem ſemipellucidum illum et nigreſcentem.

d.) Aqua haec coctione euaporationi ſubiecta, materiam, qua inficitur, nigram deponit, eaque ſubtilis et pinguis fuliginis ad inſtar vaſis latera induit; id quod mucilaginoſis partibus mellis effici experimenta cum aliis liquoribus inſtituta docent ſequentia.

Gummi arabicum.

§. 4. Gummi arabicum ſufficiente dilutum aquae copia et cum carbonum puluere coctum, filtra, quin denſiſſima, atramenti ad inſtar permeat nec exuitur nigro colore ſuo limpidumque euadit, niſi tanta addatur carbonum pulueris quantitas, qua omnes deſtruantur vel abſorbeantur gummoſae partes;

tes; id quod in gummi arabici vncia vna non niſi 30 libris pulueris carbonum obtinui.

Liquores continentes mucilaginoſas, gummoſas et gelatinoſas partes.

§. 5. Similis eſt carbonum effectus in omnia liquida, quae partes continent gummoſas, mucilaginoſas, mucoſas, gelatinoſas et glutinoſas; omnes eiusmodi liquores a tenuiſſimis carbonum particulis filtratione liberari non poſſunt, niſi ſubſtantiae iſtae mediante debita carbonum pulueris quantitate iis plane fuerint ademtae, quod vt fieri queat in nonnullis fluidis v. c. cereuiſia, lacte, ſucco citri etc. admodum larga aquae copia fluida haec diluantur neceſſe eſt.

Ceterum ex iis, quae hic expoſui, facillimum eſt iudicium, quibusnam in operationibus á pulueris carbonum vſu plane abſtinendum ſit, quotiescunque ſcilicet circa eiusmodi ſubſtantias labor eſt, quae partibus conſtitutiuis gaudent mucoſis, glutinoſis etc. niſi forte has ipſas partes ex propoſito deſtruere animus eſt.

Muria alcali phlogiſticati.

§. 6. Carbonum puluis ex muriae alcali phlogiſticati depuratione remanens aquae, qua elixiuiatur, colorem conciliauit viridem.

Acetum vini deſtillatum.

§. 7. Carbonum puluis, ſuper quem acetum vini deſtillatum empyreumaticum et frigore concentratum ad ſiccitatem vsque deſtillatione euocaueram, ſuperficie ſua omnes, quos vocant prismaticos, colores pulcherrime exhibuit.

Acetum vini crudum.

§. 8. Alius carbonum puluis, ſuper quem acetum vini crudum per congelationem concentratum, igne ſub deſtillationis finem, quantum fieri potuit, vehementiſſimo ad ſiccitatem vsque abſtraxeram, aquae frigidae mixtus poſt ſemi horae ſpatium tanto agitari inteſtino partium motu coepit, vt bona pars eius, ſpumae ad inſtar, vitri ſemi-pleni marginem transgreſſa deflueret.

Vaſa odoribus imbuta.

§. 9. Vaſa vitrea, aliaque, ab odoribus qualiscunque demum naturae ſint, pertinaciter ipſis adhaerentibus, purgari facillime poſſunt, ſi, arenae et cinerum clauellatorum adminiculo, a partibus craſſioribus liberata, carbonum puluere denuo eluantur.

Mellis ſpuma.

§. 10. E ſpuma, in mellis depuratione aliisque illius praeparationibus, frequentiſſima, quidquid mellis ipſi ineſt, puriſſimum absque omni propemodum iactura obtineri poteſt, ſi ſpumae ſufficienti aquae copia dilutae tantum addatur carbonum pulueris, quantum requiritur, vt ſolutio filtrari poſſit limpida, et filtratus denique latex, ad mellis conſiſtentiam vsque, euaporatione condenſetur.

Aqua marina.

§. 11. In aquae marinae guſtum amarum nulla plane carbonum vis eſt, id quod me quidem iudice, ſalibus eum mediis terreſtribus deberi, manifeſto probat indicio, cum extra omnem dubitationis aleam mihi quidem poſitum videatur, guſtum aquae marinae amarum et nauſeoſum, ſi a bituminoſis aquae particulis originem repeteret, pulueris carbonum ope adimi potuiſſe, qui contra in particulas ſalino-terreſtres nullo effectu gaudet.

§. 11.

Sal cornu cerui.

§. 12. Sal cornu cerui verum obtineri albiſſimum poteſt, ſi cum partibus aequalibus pulueris carbonum probe mixtum retortae immittatur, et reliquo retortae ſpatio carbonibus groſſiuſcule in puluerem redactis repleto, deſtillatio inſtituatur.

Flores Benzoes et ſal ſuccini.

§. 13. Simili methodo (§. 12.) purgari a particulis empyreumatico-oleoſis, albiſſimique reddi poſſunt flores, ſic dicti, Benzoes et ſal ſuccini, quibus tamen duobus ſalibus acidis ſolidis cauendum, ne nimis larga carbonum addatur quantitas, quos ſcilicet deſtructrice in ea vi pollere reperi.

Acidum tartari.

§. 14. Acidi tartari e libris 30 criſtallorum tartari ſeparati doſis tota poſt 17 iam horas igne vehemente criſtalliſationis punctum conſecuta eſt; quod alias absque carbonum additamento 14 dierum quin maius temporis interuallum, ambuſtionis praecauendae cauſſa, poſtulat. Qua in re notatu dignum videtur, lixiuium ſalis huius colorem albiſſimum aquae ſimilem absque vlla empyreumatis contaminatione conſeruare, licet vaſis interno parieti cruſta ſalis acidi tartari, arenae vehementi calore ambuſta prorſus et nigra, adfixa conſpiceretur.

Tartarus crudus.

§. 15. Tartarus crudus carbonum ope depurari et priuari colore ſuo poteſt quam facillime.

Oleum animale Dippelii.

§. 16. Tribus olei cornu cerui libris duas libras pulueris carbonum admiſcui, et immiſſae in cucurbitam maſſae duas libras pulueris carbonum ſuper impoſui; adplicatisque adplicandis deſtillationem adgreſſus ſum. Oleum animale Dippelii mirum quam difficile ſtillabat, ita, vt non obſtante ſum-

ma ignis vehementia 30 demum horis deſtillatio abſolueretur; vbi quidem et id notatu dignum eſt, oleum tum quoque, cum ſub finem deſtillationis arena penitus iam rubro colore ardeſceret, album tamen et clarum tranſiiſſe, nec niſi in ipſo demum fine nonnihil olei nigricantis eſſe ſecutum.

Omnibus hiſce conſideratis, videre eſt, carbonum additamentum hoc in caſu noxium magis, quam vtile eſſe: nam compertum mihi habeo, eandem deſtillationem trium olei cornu cerui librarum, ſine carbonum additione, igne longe debiliori iam duodecim horarum interuallo abſolui, obtinendumque carbonum ope oleum animale nec quantitate neque qualitate huic antecellere.

Summa aceti concentratio.

§. 17. Memorabilis aeque ac inſigni vſu ſuo commendanda eſt ea nouiter a me detecta carbonum proprietas, qua carbones in deſtillatione aceti vini ex balneo mariae, fortiores huius acidi partes tanta retinent vi, vt eae deinceps, igne vehementiori balnei arenae aqua liberatae, alcoholis aceti fortiſſimi et qualitatibus elegantiſſimis praediti forma haberi queant. Plura hac de re in alia iam diſſertatione de ſumma aceti concentratione exhibui.

Reſiduum liquoris anodini Hoffmanni.

§. 18. Infundibulum vitreum impleui carbonibus groſſiuscule pulueriſatis, per quos libras aliquot reſidui nigri liquoris anodini mineralis filtraui ita, vt id, quod perfluxiſſet, quotidie carbonibus de nouo ſuperfunderem, ſic menſibus praeterlapſis duobus liquor, ante niger, prorſus euaſit limpidus aquae ſimilis.

Oris

Oris odor.

§. 19. Oris odore, ex diſpoſitione ſcorbutica oriundo, qui laborant, eum ad aliquod certe tempus penitus extinguere poſſunt, os quotidie puluere carbonum mane perluendo. Dentes inde ſimul colorem conſequuntur albiſſimum: quibus purgandis etſi dudum conſtat panem toſtum inſeruire, eburque vſtum: tamen id aeque conſtat, vtriusque vſum non niſi in purgandis dentibus, neque vero in corrigendo oris ingrato odore fuiſſe cognitum, cui quidem ſubſtantiae carbonaceae, niſi exuſtae fuerint quam perfectiſſime, inſeruire non poſſunt.

Aqua putrida.

§. 20. Aqua putrefactione corrupta per carbones prorſus corrigitur. (*)

Acidum formicarum.

§. 21. In acidum formicarum carbones inſignem exercent vim deſtructiuam, vnde carbonum vſus in depuratione acidi huius eſſe nullus poteſt.

Vrina.

§. 22. Vrina carbonum ope ita depurari poteſt, vt ea ad criſtalliſationis punctum euaporationi ſubiecta criſtallos largiatur albas regularesque.

Alcali phlogiſticatum.

§. 23. In alcali phlogiſticatum carbones non niſi eum edunt effectum, vt ſal hoc colore ſuo flauo penitus exuant et album reddant.

He-

(*) Haec dum imprimuntur: inſignem hanc pulueris carbonum in aqua putrida depuranda vtilitatem Celeb. Lowitz nouis experimentis perfecit et publice demonſtrauit, atque imprimis ad vſus naucticos traduxit; quod argumentum in alio Actorum noſtrorum Tomo ipſe Auctor vberius exponet. D. 7 Octob. 1790.

Euler Acad. Secretarius.

Hepar ſulphuris.

§. 24. Solutio hepatis ſulphuris carbonum ope non modo colore ſuo flauo et odore, ſed ſulphure quoque ſuo priuatur ita, vt adiecto poſtea quolibet acido, nec conſuetus hepatis ſulphuris odor, nec praecipitatio vlla ſubſequatur; in lixivio autem percipitur tartarus vitriolatus. Ex quibus concludere licet, ſulphur in menſtruo alcalino ſolutum auxiliante carbonum puluere principii ſui phlogiſtici iacturam pati et deſtrui.

Similem prorſus effectum carbones in ſcoriarum antimonii ſolutionem edunt, e qua ſulphur antimonii praecipitatione confici ſolet.

Balſamus ſulphuris.

§. 25. Balſami ſulphuris cum oleo aethereo parati in ſpiritu vini rectificatiſſimo ſolutioni carbonum puluis ſi additur, proprius ingratusque balſami ſulphuris odor extinguitur omnis, nec niſi olei aetherei, ſulphuri ſoluendo impenſi, odor percipitur.

Sapo.

§. 26. In ſolutionem ſaponis tam aquoſam, quam ſpirituoſam carbones nullum edunt effectum.

Camphora.

§. 27. Camphora non rafinata ſpiritu vini ſoluta colore flauo plane priuatur mediante carbonum puluere; in odorem vero camphorae carbonum vis eſt nulla.

Camphorae criſtalliſatio.

§. 28. Solutioni ſaturatae camphorae in ſpiritu vini rectificatiſſimo ſi carbonum puluis additur; camphora in criſtallos concreſcit albas plumoſas, quae pro tempeſtatis viciſſitudine mox ſoluuntur mox denuo formantur.

Cri-

Criſtalli tartari.

§. 29. Cremoris tartari vncias ſex cum carbonum pulveris libra vna, et decem libris aquae purae miſcui, mixtum in cucurbita veſica bubula clauſum per horas nonnullas vehementi expoſui coctioni in arenae balneo. Refrigeratis omnibus, inter carbonum puluerem, cremorem tartari in criſtallos pellucidas laminoſas 9 lineas circiter longas adeoque ab ordinaria huius ſalis figura prorſus diſpares abiiſſe reperi.

Calx tartariſata.

§. 30. Cremorem tartari, conſtat, calcis tartariſatae non nihil ſemper fouere, quod ſal terreum in ſuperiori experimento (§. 29.) in criſtallos polygonas aurei coloris, et ſeminis papaueris magnitudine, concreuiſſe vidi.

Mel.

§. 31. Mel adiuuante carbonum puluere priuatur quidem proprio ſuo odore ſaporeque, nec non partibus mucoſis et colore: redit vero mellis fuſcus color, cum primum, ſeparatis ab eo carbonibus, inſpiſſationis cauſſa denuo exponitur igni, quin moderatiſſimo.

Cimex lectularius L.

§. 32. Cimices cum carbonum puluere triti, foetidum odorem ſubito amittunt omnem.

Crematum frumenti.

§. 33. Crematum frumenti auxiliantibus carbonibus ſine deſtillationis adminiculo depuratum, fortitudinis gradum eo, quem ante depurationem poſſidebat, maiorem conſecutum eſſe videtur; nam crematum tale ab omnibus, quos latuit depurationis modus, pro ſpiritu rectificato habitum eſſe, compertum habeo. De quo igitur fortitudinis augmento vt fierem certior, ſequentia inſtitui experimenta.

§. 34. 1.) Depuratis 4 cremati libris mediantibus 16 carbonum pulueris vnciis, a 12 cremati huius depurati vnciis omnem tanta, quanta potui, cura ſeparaui aquam, ſalis tartari ſicci beneficio: indeque 31 drachmas et 20 grana ſpiritus rectificatiſſimi ſummopere dephlegmati obtinui.

2.) Eadem ratione ex 12 vnciis cremati non depurati 32 drachmas et 10 grana nactus ſum ſpiritus tartariſati rectificatiſſimi. Ex quo conſequitur, cremati vncias 12 per depurationem cum 4 carbonum pulueris vnciis 50 granorum iacturam ſpiritus ardentis feciſſe, id quod et inde comprobatur, grauitates ſpecificas cremati non depurati ſi compares, quarum illam ad hanc in ratione numeri 1000 ad 1008 reperi.

Carbones itaque in ſpiritum ardentem vim exſerunt deſtructricem, et fortitudinis §. 33. memoratae apparentis, meo quidem iudicio, cauſſa ex eo vnice repetenda videtur, quod partes cremati ſpirituoſae a partibus empyreumatico-oleoſis per carbones liberantur. Certus igitur, cremati vim carbonibus debilitari potius, quam augeri, et rei mihi hucusque ignotae nouitate commotus plura eaque variata feci tentamina ſequentia.

§. 35. 1.) Cremati vncias 12 deſtillationi per ſe, id eſt, ſine additamento carbonum, ſubmiſi; abſtracto omni ſpiritu ad ſiccitatem fere vsque ne in phlegmate remanerent partes ſpirituoſae, et omnibus partibus aquoſis a deſtillato valde phlegmatico ope ſalis tartari ſicci ſeparatis; 31 drachmas cum 45 granis ſpiritus rectificatiſſimi tartariſati obtinui.

2.) Abſtractis 12 cremati vnciis ſuper aequalem carbonum pulueris copiam ad ſiccitatem vsque, detractisque partibus aquoſis ſalis tartari beneficio; 28 drachmas cum granis 45 ſpiritus tartariſati adeptus ſum. Hoc in caſu ergo, 12 cremati vnciae 3 drachmarum ſpiritus ardentis detrimentum paſſae ſunt, quae

quae maior iactura maiori, quae hoc in experimento impenſa fuit, carbonum quantitati eſt adſcribenda.

§. 36. Obſeruata, quae hic expoſui, prima fronte minime fauere carbonum in depurando cremato vſui, etſi lubens concedo: inde tamen nihil eſſe pertimeſcendum, neque carbones in depurando cremato inde priuari vtilitate ſua, ſequentibus comprobari poſſe argumentis perſuaſum mihi habeo:

1.) Ad perfectam cremati depurationem carbonum quantitas ſufficit ea longe minor, quam experimentis expoſitis ex conſulto impendi. Ad depurandas enim 12 cremati partes, non niſi vna carbonum pulueris requiritur.

2.) Si cremato non niſi tanta adjicitur pulueris carbonum copia, quanta partibus empyreumatico-oleoſis exſtirpandis ſufficit: dubitari nullo modo poteſt, quin carbonum puluis, partibus hiſce cremato leuiter adhaerentibus extemplo ſaturatus, omni vi ſua in crematum deſtructrice ſit cariturus, quam ſcilicet non niſi tum in ſpiritum ardentem exſerit, cum ſufficientem particularum phlogiſticarum copiam, cui abſorbendae vim ſuam dephlogiſticatricem impendere poſſit, crematum ipſi offerre non poteſt.

3.) Sed ſi vel maxime dicas, ad perfectam cremati depurationem eo certius obtinendam fieri vix ac ne vix quidem poſſe, quin addita pulueris carbonum quantitas in exceſſu peccet adeoque ſpiritus ardentis non nihil deſtruat: inficias tamen ire non licet, iacturam iſtam tam exiguam, et, ſi cremati puritatem hac iactura quaſi redimendam intuearis, tam exigui eſſe momenti, vt iure meritoque pro plane nulla haberi debeat.

§. 37. In depuratione cremati per carbonum pulue-
rem ſine deſtillationis adminiculo perficienda et id notatu di-
gnum eſt, crematum ſubtiliſſimis carbonum particulis eo citius
liberari et prorſus clarum euadere, quo maior fuerit pulueris
carbonum copia depurationi impenſa, et contra; id quod ſe-
quentibus obſeruationibus didici:

Duodecim cremati vnciis.

ſi pulueris carbonum addas	Crematum euadit limpidum
Drachmam dimidiam - -	nunquam
Drachm. 1 - - -	poſt 4 menſes
- - 4 - - -	- - 1 menſem
Unciam 1 - - -	- - 14 dies
- - 2 - - -	- - 6 - -
- - 3 - - -	- - 5 - -
- - 4 - - -	- - 24 horas
- - 5 - - -	- - 2 - - -

Etſi igitur aucta, quantum fieri poteſt, pulueris carbo-
num quantitate acceleratur cremati depuratio; fatendum tamen
et id eſt, eo maiorem cremati copiam inter carbonum parti-
culas ſuperſtitem retineri, non niſi deſtillatione liberandam.
Contra vero vnus idemque carbonum puluis cremato prioris
infuſionis iam imbutus, vicibus eo magis iteratis cremati
depurationi adhiberi poteſt, donec particulis empyreumaticis
prorſus ſaturatus vim dephlogiſticatricem iam nullam exſerere
queat.

Acetum.

§. 38. In manuali chemicorum (Taſchenbuch für Apoth.
und Scheidek.) de anno 1789. pag. 173. obſeruatio occurrit,
ex qua acetum per abſtractionem ſuper carbonum puluerem
inſigni-

inſigniter debilitari concluditur. Sciendi cupidus, quo pacto res haec ſe habeat, pericula ſequentia ſuſcepi:

1.) Aceti vini crudi vnciis 12 deſtillatione igne blando ad ſiccitatem vsque euocatis; grauitatem ſpecificam aceti huius deſtillati, quod vncias 11 cum drachmis 6 pendebat, ad aquam inueni vt 1008 ad 1000; fortitudinem vero 4 graduum.

2.) eiusdem aceti crudi 12 vnciis ſuper aequalem carbonum pulueris quantitatem ad ſiccitatem vsque abſtractis, acetum obtinui deſtillatum odore quidem puriſſimum, ſed admodum debile, cuius grauitas ſpecifica fuit 1004 et fortitudo 2 tantummodo graduum. Maxime autem notatu dignum hac in deſtillatione id erat, quod remanens carbonum puluis igne aperto vehementiſſimoque drachmam vnam adhuc largiebatur alcoholis aceti concentratiſſimi, odoris puriſſimi nulloque empyreumate inquinati.

3.) Porro 12 aceti crudi vncias ſuper vnam duntaxat carbonum pulueris vnciam deſtillatione ad ſiccitatem euocaui, quae ea eſt quantitatis carbonum proportio, qua continuo optimo cum ſucceſſu vtor, quotiescunque largiorem aceti quantitatem deſtillationi ſubiicio. Aceti huius deſtillati tam grauitas ſpecifica, quam fortitudo accurate fuerunt eaedem, quibus acetum ſine carbonum additamento deſtillatum (n. 1.) gaudebat, h. e. 1008. et 4 graduum.

§. 39. Ex tentaminibus modo expoſitis (§. 38.) videre eſt, carbones vim exercere deſtructricem in acetum perinde ac in ſpiritum ardentem, ſi nimirum admodum larga eorum adhibetur quantitas. Vnde, quae ſupra §. 36. de iuſta pulueris carbonum quantitate cremato addenda monui, etiam hic valere iure videntur.

Acidum lignorum.

§. 40. Acidum ſic dictum lignorum, quod ligni guaiaci deſtillatione obtinui, per carbones adiuuante deſtillatione a particulis empyreumaticis ei adhaerentibus facile liberatur. Acidum iſtud odorem guſtumque inde obtinet aceti deſtillati perſimilem. Immo per ſummam concentrationem ipſius, methodo a me inuenta inſtituendam, id acidum eodem, quo acetum, ſucceſſu optimo ad ipſam vsque criſtalliſationem perduxi.

Acidum nitri.

§. 41. Memorabile Cel. Lichtenſteinii experimentum (chem. Annalen 1786. B. 2. S. 217.) circa carbonum ſolubilitatem pari ſucceſſu equidem imitatus ſum: dum nimirum ſpiritum nitri fumantem ſepties ſuper duas carbonum pulueris vncias abſtraherem; acidum nitri magna ex parte deſtruebatur; carbones vero in retorta relicti formam induebant extracti nigri, guſtu admodum adſtringente et amaro praediti, de quo ſingulari concreto ſequentia obſeruaui:

§. 42. 1.) Subſtantia haec non in aqua tantum, ſed in ſpiritu quoque vini rectificatiſſimo ſoluitur. 2.) Solutio materiae huiusce aquoſa, arenae balneo euaporationi ſubiecta, ſpumas agit et dureſcit tandem. 3.) Siccata aëri ſi exponitur aperto, humiditate attracta, in liquorem fuſcum abit. 4.) Liquescentia tamen haec progreſſu temporis denuo diminuitur, elapſisque aliquot menſibus, non excluſo aëris libero aditu, humiditatem attractam ſenſim ſenſimque emittens, ad maſſam ſiccam fragilem nigri coloris indureſcit, ſicque deliqueſcendi proprietatem plane deponit. 5.) Solutioni larga aquae quantitate elutae ſi carbonum puluis additur: colore ea flavo et amaro ſapore ſuo prorſus exuitur et aquae ad inſtar limpida euadit.

Reſina Ialappae.

§. 43. Reſina Ialappae, quae ordinarie nigri fere eſt coloris, me obſeruante carbonibus reddi poteſt alba prorſus, idque ſequenti modo:

Reſina haec, euaporatione nondum exſiccata, diligentiſſime aqua eluta, et a partibus extractiuis liberata, ſoluatur ſpiritu vini rectificatiſſimo. Solutio, praeuia filtratione a partibus heterogeneis indiſſolubilibus ſeparata, ſatis larga diluatur adhuc ſpiritus vini rectificatiſſimi quantitate, vt carbonum pulueris adiici ei poſſit tantum, quantum ad perfectiſſimam coloris priuationem requiritur, omnibus in cucurbita vitrea remixtis, digeſtio frigida per nychthemerum cum iterata aliquoties vaſis concuſſatione ſufficit. Solutio ſi omni colore, vt aqua, prorſus deſtituta fuerit; decantatur a carbonibus ad fundum collectis, hi vero, ne reſinae inter eos haerentis non nihil pereat, cum debita alcoholis quantitate, ſuperinfundendo, agitando filtrandoque et exprimendo, elutriandi ſunt. Liquores denuo mixti, et ſtudioſiſſime per chartam bibulam filtrati, infunduntur, addita iuſta aquae copia, in retortam vitream arenae balneo imponendam. Abſtracto omni ſpiritu igne moderato, liquor lacteſcens in retorta relictus calidus adhuc infundatur in cucurbitam detruncatam, lenique ſubiiciatur euaporationi, vsquedum quidquid particularum ſpirituoſarum ipſi ineſt, in auras diſpulſum fuerit. Particulis dein reſinoſis ad fundum collectis, ſuperſtes aqua decantetur, reſinaque in fundo reſidua pellucidiſſima, tam colore quam ſpiſſitudine therebinthinae venetae puriſſimae aemula, eluatur aqua; inſpiſſando demum leni calore et accedente agitatione, reſina ialappae obtinebitur ſicca prorſusque alba et proprio ſuo odore nulla ex parte priuata. Succeſſit mihi proceſſus hic, cum reſinae ialappae

pae vnciis ſex abundante ſpiritus vini rectificatiſſimi quantitate ſolutis, tres carbonum pulueris libras admiſcuiſſem.

§. 44. Tentaminibus accurate inſtitutis, compertum mihi habeo, carbones in reſinam ialappae nullam exercere vim deſtructricem.

Colophonium.

§. 45. Solutioni colophonii colore ſuo priuandae non niſi immanis carbonum pulueris copia ſufficit.

Naphtha vitrioli ſulphurea et ſpiritus ſulphuris.

§. 46. Naphtha vitrioli particulis ſulphureis inquinata carbonum puluere ab eis liberari nequit. Aqua vero naphtha eiusmodi impraegnata carbonibus odore ſulphureo ſubito priuatur, naphthae non niſi purae odore ſuperſtite. Sic phlegma quoque ſulphureum, quod ſub finem deſtillationis liquoris anodini Hoffmanni obtinetur, odorem ſulphureum amittit, cum primum debita ei admiſcetur carbonum pulueris copia.

Subſtantia volatilis ex ſebis et oleis pinguibus.

§. 47. In volatilem ſubſtantiam odoris maxime penetrantis, ſeborum et oleorum pinguium deſtillatione obtentam, carbones vi gaudent nulla.

Corpora reſinoſa.

§. 48. Solutiones ſpirituoſae reſinarum ac balſamorum naturalium carbonum ope plane orbantur colore ſuo et aquae inſtar limpidae redduntur; odore tamen, quantumuis addas pulveris carbonum, prorſus integro. Tentamina ea de re inſtitui cum ſolutionibus gummatum aſſae foetidae, aſſae dulcis, galbani, maſtichis, ambrae, reſinae Ialappae et balſami peruuiani.

Olea aetherea.

§. 49. Nec maior eſt carbonum efficacia in olea aetherea eorumque odores, quantumuis iis magna addatur pulueris carbonum

bonum copia et quantumuis alcohole vini vel immediate diluantur, vel ex materia iis grauida deſtillatione cum ſpiritu vini extrahantur.

Si vero ſpiritui oleo quodam aethereo imbuto tantum addatur aquae, vt lacteſcat; tunc admiſcendo ſemel carbonum debitam quantitatem, ſpiritus aqua debilitatus oleis et odore eorum prorſus priuatur, dum carbones, laeſo combinationis vinculo, partes oleoſas abſorbent ita, vt etiam proprio ſuo odore deſtituantur.

Olea empyreumatica.

§. 50. Olea contra empyreumatica, ſatis copioſa alcoholis vini quantitate ſoluta, carbonibus, nulla adeo aqua addita, odore non tantum empyreumatico, ſed colore etiam ita priuantur, vt ſolutio ipſorum ſpiritus puriſſimi ad inſtar prorſus limpida et inodora euadat.

Si tamen oleis empyreumaticis non ſolutis carbonum puluis addatur; nulla fit mutatio ipſorum, ob voluminis exiguitatem, per quam debita abſorbendo omni empyreumati carbonum quantitas addi ipſis non poteſt.

Aquae ſtillaticiae ſimplices.

§. 51. Aquae, deſtillatione ſuper corpus quoddam aethereo-oleoſum abſtractae, addito carbonum puluere, particulis aethereo-oleoſis et odore, quibus imbutae ſunt, priuantur prorſus. Idem quoque reſpectu aquarum, particulis empyreumatico-oleoſis impraegnatarum, locum habet.

Infuſa aquoſa ſubſtantiarum vegetabilium.

§. 52. Nec non infuſiones aquoſae gummatum aſſae foetidae et galbani, radicum ſerpentariae et valerianae, odo-

rem vehementem, quem hiſce ſubſtantiis debent, addito pulvere carbonum ſtatim et penitus amittunt.

Opium.

§. 53. Solutio aquoſa opii, ſi ei inter coctionem ebullienti additur carbonum puluis, odore quoquo ſuo narcotico quam perfectiſſime priuatur, quo facto per filtrum facile et pellucida tranſit.

Vinum.

§. 54. Vina tam rubra quam alba carbonibus prorſus decolorantur.

Eſſentia corticum aurantiorum.

§. 55. In eſſentiae corticum aurantiorum nec odorem neque colorem carbonum vllam vim vidi.

Abſynthium. Crocus.

§. 56. Eſſentia abſynthii ſimplex colorem et odorem carbonum vi amittit plane. Idem accidit tincturis croci ſpirituoſae et aquoſae.

Lignum ſantalum rubrum, coccionella et gummi laccae.

§. 57. Tincturae rubrae aquoſae et ſpirituoſae ligni ſantali rubri, coccionellae et gummi Laccae colore ſuo per carbones prorſus priuantur; qua occaſione, in colores potiſſimum rubros exſerere carbones vim ſuam, notandum eſt.

Aqua aërata.

§. 58. Aqua aërata, addita carbonum debita quantitate, aëre ſuo fixo ſtatim priuatur omni, ita, vt in aquam calcis iam vi gaudeat nulla.

Aqua calcis.

§. 59. Aqua calcis carbonum puluere prorſus priuatur particulis calcareis.

Aër imflammabilis.

§. 60. Aër imflammabilis, vitro contentus, addito carbonum puluere, et admoto igne vitri orificio, cum fragore incenditur.

Aër hepaticus.

§. 61. Aquae aëre hepatis ſulphuris impraegnatae admixto carbonum puluere; aër iſte expellitur penitus.

Allium et cepae.

§. 62. Cepae et allium odorem penetrabilem amittunt prorſus, ſi in mortario cum carboum puluere conterantur.

Vis dephlogiſticatrix carbonum varii generis.

§. 63. Praeter ea carbonum genera, quae antea iam dixi vi gaudere dephlogiſticatrice, ſequentia quoque, vt nuperrime reperi, eadem vi praedita ſunt:

1.) Lithantrax probe calcinatus.

2.) Reſiduum remanens poſt ſpiritus nitri dulcis deſtillationem calcinatione in tigillo tecto in carbonem redactum.

3.) Calcinata, praeuia aquae lotione, materia nigra carbonacea, occurrens in reſiduo a liquoris anodini Hoffmanni deſtillatione ſuperſtite; qua de ſubſtantia notatu dignum eſſe videtur, quod ea, proprio quaſi marte, absque vlla praeuia calcinatione vim aliquam exſerat dephlogiſticatricem, dummodo aqua eluta a particulis acidis ei adhaerentibus liberetur.

Fumus.

§. 64. Fumus vitro incluſus prorſus abſorbetur, ſi ei admiſcetur carbonum puluis, huic vero omnis inde vis dephlogiſticatrix adimitur. Ex quo experimento manifeſtum eſt, quanti momenti ſit, a puluere carbonum experimentis deſtinato omnem arceri, quantum fieri poteſt, aëris liberi aditum fumo ſaepiuſcule aliisue phlogiſticis particulis inquinati, ne iis imbutus puluis progreſſu temporis vi ſua dephlogiſticante priuetur et experimenta praeter opinionem ſucceſſu excidant.

EX-

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.
De ſingulari ratione differentiandi et integrandi quae in ſummis ſerierum occurrit.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

En regardant comme connue la ſomme de la ſérie d'une puiſſance quelconqne n des nombres naturels, ſavoir:

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \;-\;-\;-\;-\; x^n$$

on trouve la ſomme de la ſérie d'une puiſſance plus élevée d'un degré, Σx^{n+1}, en prenant l'intégrale de la première multipliée par ∂x & par l'expoſant de la puiſſance dont on demande la ſomme de la ſérie; pourvu toutefois que l'intégrale ſe prenne de manière que la ſomme évanouiſſe en mettant $x = 0$, & qu'on ajoute à l'intégrale un dernier terme de la forme αx & tel que cette même ſomme devienne égale à l'unité, en mettant $x = 1$.

De la même manière, ſi l'on regarde comme connue la ſomme de la ſérie de la $(n+1)^{me}$ puiſſance des nombres naturels, ſavoir :

$$\Sigma x^{n+1} = 1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + \;-\;-\;-\;-\; x^{n+1},$$

on trouve la ſomme de la ſérie des mêmes nombres élevés à une puiſſance moins elevée d'un degré, Σx^n, en diviſant la différentielle de la première, Σx^{n+1}, par ∂x & par l'expoſant de la puiſſance donnée $n+1$, pourvu qu'on omette tous les termes conſtans qui pourroient provenir de la différentiation, parceque la ſomme cherchée doit s'évanouir en mettant $x = 0$.

Voici

Voici ce que la méthode de différentiation & d'intégration, dont il eſt queſtion dans le titre, a de particulier, & ce qui a déterminé l'auteur, d'en faire le ſujet de ce mémoire. Il donne d'abord une démonſtration rigoureuſe des opérations que les corrections mentionnées exigent, & enſuite il fait voir que ces opérations ne ſont pas reſtreintes uniquement aux ſéries des puiſſances des nombres naturels, mais qu'on peut les employer dans la ſommation de toutes ſortes de progreſſions. Ainſi par exemple ſi la ſomme d'une ſérie dont le terme général eſt X (fonction de l'indice du dernier terme x), eſt connue, l'Auteur fait voir qu'on peut trouver, par un procédé ſemblable, la ſomme d'une ſérie dont le terme général eſt $\frac{\partial X}{\partial x}$, & la ſomme d'une autre ſérie dont le terme général eſt $\int X \partial x$.

II.

Methodus generalis inueſtigandi radices omnium aequationum per approximationem.

Auctore *L. Eulero*, pag. 16.

Qu'on ſe repréſente ſous la forme $Z = 0$, une équation quelconque, de laquelle il s'agiſſe de déterminer la racine z. Si dans cette équation on met à la place de la racine z une valeur approchante de cette racine, v, de laquelle on ſuppoſe qu'elle rende $Z = V$: il eſt clair que ſi v étoit la véritable racine de l'équation propoſée, il y auroit $V = 0$; mais que, parceque v n'eſt qu'une valeur approchante de la racine, V ne ſera pas tout à fait égal à zéro. Suppoſant donc $V = y$, cette quantité y ſera une fonction connue de v, qui devient égale à zero, lorsque $v = z$; & réciproquement, v ſera une certaine fonction de y, qu'on pourra indiquer

quer ainſi: $v = \Gamma : y$, & qui ſera telle, qu'en mettant $y = 0$ il y ait $v = z$.

Or on ſait par la nature des différentielles qu'à cauſe de $\Gamma : y = v$, il y a

$$\Gamma (y + a) = v + \frac{a \partial v}{\partial y} + \frac{a^2 \partial^2 v}{2 \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 v}{6 \partial y^3} + \&c.$$

ou bien, en indiquant, pour abrêger, les fractions $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$, &c. par les lettres p, q, r, &c. qu'on a

$$\Gamma : (y + a) = v + a p + \tfrac{1}{2} a^2 q + \tfrac{1}{6} a^3 r + \&c.$$

expreſſion qui, en donnant à la quantité arbitraire a la valeur $-y$ ou $-$ V, devient

$$z = v - p V + \tfrac{1}{2} q V^2 - \tfrac{1}{6} r V^3 + \&c.$$

& c'eſt moyennent cette ſérie infinie qu'on trouve très approchamment la racine z de l'équation propoſée.

Mais un inconvénient attaché à cette méthode d'approximation, c'eſt qu'elle ne peut réuſſir que lorsqu'on connoît déjà aſſez exactement la valeur de la racine z: Or dans ce cas la methode connue d'approximation eſt beaucoup plus commode dans l'application. L'Auteur de ce Mémoire convient lui-même de cette imperfection; mais il fait valoir en même tems un autre avantage de ſa nouvelle méthode, qui effectivement mérite toute l'attention des Géomètres: ſavoir que le même raiſonnement conduit auſſi à une ſérie qui exprime une puiſſance quelconque de la racine; & c'eſt de cette derniere ſérie que M. Euler déduit enfin auſſi une autre qui exprime le logarithme naturel de la racine. Quelques exemples, propres à faire voir l'uſage de cette méthode d'approximation, terminent ce Mémoire.

III.

III.

Innumerae aequationum formae ex omnibus ordinibus, quarum reſolutio exhiberi poteſt.

Auctore *L. Eulero*, pag. 25.

Les règles générales, données pour la réſolution des équations, n'étant pas applicables pour les équations qui ſurpaſſent le quatrième degré : il eſt de la dernière importance de connoître celles d'entre les équations des ordres ſupérieurs qui peuvent être réſolues. Leur nombre eſt infiniment grand. Pour ne point dire ni des équations qui ont des racines rationnelles, ni de celles qui peuvent être réſolues en facteurs & réduites, par conſéquent, à des formes d'équations réſolubles par le règles générales: pluſieurs Géométres, & ſurtout l'Auteur de ce Mémoire lui-même, ont aſſigné autrefois des équations réſolubles de tous les degrés.

Dans le préſent Mémoire feu M. Euler a donné de nouveau une infinité d'équations algébriques, dont toutes les racines peuvent être aſſignées. Toutes ces équations ſont contenues dans la forme generale ſuivante :

$$x^n = n'' ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right) x^{n-2} + n''' ab\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right) x^{n-3} + n'''' ab\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right) x^{n-4},$$

où les caractères n'', n''', n'''', &c. indiquent le ſecond, troiſième, quatrième, &c. coefficient du binome élevé à la n^{me} puiſſance ; & une de racines de cette équation de l'ordre n

eſt $\dfrac{b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$, où $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ admet n valeurs differentes, de ſorte qu'on aura auſſi toutes les n racines de l'équation mentionnée du n^{me} degré.

Cette

Cette vérité eſt puiſée de la conſidération de cette équation: $(\frac{a+x}{b+x})^n = \frac{a}{b}$; car on en tire $\frac{a+x}{b+x} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & partant $x = \frac{b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - a}{1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$: & en développant l'équation adoptée

$$b(a+x)^n = a(b+x)^n,$$

elle prendra la forme expoſée ci-deſſus:

$$x^n = n'' ab (\frac{a-b}{a-b}) x^{n-2} + n''' ab (\frac{a^2-b^2}{a-b}) x^{n-3} + \&c.$$

On pourroit s'imaginer que la conſidération de cette équation: $(\frac{f+x}{g+x})^n = \frac{a}{b}$, pût mener à des formes différentes & plus générales d'équations réſolubles; mais l'Auteur, pour obvier à cette erreur, fait voir que quelque différentes de a & b que ſoyent les quantités f & g, cette équation ſe laiſſe toujours réduire à la précédente.

Enfin, M. Euler apperçoit dans les formes des racines trouvées pour les équations contenues dans ſon équation générale, une nouvelle confirmation de la conjecture qu'il avoit hazardée autrefois touchant la réſolution des équations dans lesquelles le ſecond terme manque, comme par exemple dans celle-ci:

$$x^n = p x^{n-2} + q x^{n-3} + r x^{n-4} + \&c.$$

en prétendant que de pareilles équations étoient toujours réſolubles, moyennant une équation réſolvante d'un dégré moins élevée de la forme:

$$y^{n-1} - A y^{n-2} + B y^{n-3} - C y^{n-4} + \&c. = 0$$

la forme de la racine étant

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \&c.$$

 où

où α, β, γ, δ, &c. indiquent les racines de l'équation réſolvante, qui ſont au nombre de $n - 1$.

IV.

De curuis algebraicis, quarum longitudo exprimitur hac formula integrali: $\int \frac{v^{m-1} \partial v}{\sqrt{1 - v^{2n}}}$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 36.

L'illuſtre Auteur de ce Mémoire, dont le génie ſe roidiſſoit conſtamment contre les difficultés, & qui dût à cette opiniâtreté, ou à cette force de caractère, la gloire d'en avoir ſurmonté tant dans ſa vie, a fait un grand nombre de recherches ſur les lignes courbes, dont les arcs peuvent être exprimés par certaines formules intégrales. On ſe ſouviendra de ſes recherches ſur les courbes dont la longueur peut être méſurée par des arcs elliptiques & paraboliques, desquelles nous avons rendu compte dans les extraits inſérés dans l'Hiſtoire de l'Académie pour l'année précédente. Toute cette matière eſt encore enveloppée de profondes ténèbres, & ce ne ſera qu'à force de traiter beaucoup de cas particuliers, qu'on parviendra à y répandre de la lumière. C'eſt donc dans l'intention de contribuer quelque choſe à l'approfondiſſement de ces myſtères, que l'Auteur cherche ici des courbes algebriques dont la longueur de l'arc indéfini puiſſe être exprimée par la formule intégrale rapportée dans le titre du Memoire. Il en trouve une quantité innombrable de tous les ordres, quoique la méthode qu'il employe n'épuiſe pas encore toutes les ſolutions poſſibles, comme M. Euler fait voir clairement par l'exemple des courbes rectifiables qui ſatisfont au Problème. Au reſte nous ſommes obligés

gés de renvoyer le Lecteur curieux de connoître la méthode de l'Auteur, au Mémoire même; car il eſt impoſſible d'en donner une idée ſuffiſante, ſans repéter une bonne partie des calculs longs & pénibles, par lesquels il faut paſſer pour déterminer les coordonnées des courbes ſatisfaiſantes.

Le Mémoire eſt terminé par la ſolution d'un Problème beaucoup plus général, dans lequel on demande des courbes algébriques dont les arcs indéfinis puſſent être exprimés par cette forme intégrale:

$$\int \frac{v^{m-1}\,\partial v}{\sqrt{1 - v^{2n}}}\,[a + b\,v^{2n} + c\,v^{4n} + d\,v^{6n} + \&c.].$$

V.

De duabus pluribusue curuis algebraicis, in quibus, ſi a terminis fixis aequales arcus abſcindantur, eorum amplitudines datam inter ſe teneant rationem.

Auctore *L. Eulero.* Pag. 63.

En déſignant par $\alpha\,\Phi$ & $\beta\,\Phi$ les amplitudes des deux courbes d'égale longueur, de façon que le rapport qui doit ſubſiſter entre ces deux amplitudes ſoit comme $\alpha:\beta$; le Problème que l'Auteur ſe propoſe de réſoudre dans le préſent Mémoire, ſe réduit à trouver pour l'élément commun ∂s des deux arcs une formule qui, multipliée par chacune de ces quatre quantités dépendantes des amplitudes

$$\text{ſin.}\,\alpha\,\Phi,\ \text{coſ.}\,\alpha\,\Phi,\ \text{ſin.}\,\beta\,\Phi,\ \text{coſ.}\,\beta.\,\Phi,$$

devienne intégrable. Car les intégrales fourniſſent les coordonnées des courbes cherchées qui ſeront algébriques, toutes les fois que le rapport $\alpha:\beta$ eſt rationnel.

Quelque difficile qu'il puiſſe paroître de trouver une telle formule douée de quatre multiplicateurs qui la rendent intégrable, l'Auteur en trouve une facilement, & ſe voit par là, en état d'aſſigner les coordonnées des deux courbes.

La méthode que l'Auteur a employée pour réſoudre ce Problème aſſez difficile en apparence, eſt d'autant plus remarquable, qu'elle s'étend à tel nombre de courbes ſatisfaiſantes au Problème qu'on voudra. Car ſoyent les amplitudes d'un nombre indéfini de lignes courbes $\alpha\Phi$, $\beta\Phi$, $\gamma\Phi$, $\delta\Phi$, &c. on n'a qu'à prendre

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \frac{A\,\partial\partial v}{\partial\Phi^2} + \frac{B\,\partial^4 v}{\partial\Phi^3} + \frac{C\,\partial^6 v}{\partial\Phi^5} + \&c.$$

v étant une fonction quelconque algébrique de Φ, cette formule ſera douée de la propriété d'admettre l'intégration, ſoit qu'on la multiplie par le ſinus, ou par le coſinus de chaque amplitude. Quant aux coéfficiens A, B, C, &c. le premier eſt la ſomme des fractions $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\beta^2}$, $\frac{1}{\gamma^2}$, &c. le ſecond eſt la ſomme des produits de deux à deux, le troiſième la ſomme des produits des mêmes fractions, priſes trois à trois, & ainſi de ſuite. Or ∂s multiplié par chacun des multiplicateurs mentionnés, & intégré fournit tant les abſciſſes que les ordonnées de toutes les courbes qu'on demande.

VI.

De methodo tangentium inuerſa ad Theoriam Solidorum translata.

Auctore *L. Eulero*, pag. 77.

La méthode inverſe des tangentes qu'on met en uſage pour trouver des lignes courbes douées de certaines propriétés

tés par rapport aux Tangentes, Soutangentes, Normales, Sounormales, ou autres lignes ſemblables déterminées par le rapport des différentielles des coordonnées & de l'arc de la courbe, n'a pas peu contribué à l'avancement tant de la Géométrie que de l'Analyſe. M. Euler ſe ſert ici d'une méthode ſemblable pour déterminer des ſurfaces douées de certaines propriétés par rapport à ces mêmes lignes. Tous les Problèmes de ce genre ſe réduiſent à trouver quelle fonction de deux variables *x* & *y* doive être une troiſième variable *z*, pour qu'une certaine propriété, ou rélation entre les différentielles de ces quantités, puiſſe avoir lieu. L'idée eſt heureuſe & mérite d'autant plus l'attention des Geomètres, que ſon développement conduit aux fonctions à deux variables, c'eſt-à-dire à une branche de l'Analyſe entièrement différente de l'Analyſe ordinaire, & dont à peine les premiers fondemens ſont jettés. Ce nouveau genre de calcul ne peut donc que gagner en perfection par l'application de ſes principes à des Problèmes de la nature de ceux que M. Euler traite dans ce Mémoire.

Le premier Problème dont il s'occupe eſt de conſtruire, ſur un plan donné, un ſolide tel que ſi de chaque point de ſa ſurface ou érige des lignes perpendiculaires à la ſurface & terminées par le plan donné, toutes ces lignes ſoyent égales entr'elles; Problème analogue à celui, où, par la méthode ordinaire inverſe des tangentes, on cherche une ligne courbe dont toutes les Normales ſoyent égales. Il eſt évident qu'un Parallélépipède rectangle ſatisfait aux conditions du Problème, auſſi bien qu'un Hémisphère & un demi-cylindre. Mais outre les corps que nous venons de nommer, il y aura une infinité d'autres qui ſatisferont également à ces conditions & qui doivent tous être compris dans la ſolution générale qu'on exige.

Dans

Dans la première ſolution que l'Auteur donne, & qui eſt analytique, on découvre ſans peine le caractère principal de tous les Problèmes qui demandent l'intégration de fonctions à deux variables, ſavoir que cette intégration fait entrer dans le calcul, au lieu des conſtantes amenées par les intégrations ordinaires, une fonction arbitraire, laquelle, comme on voit dans ce Problème, eſt repréſentée par une ligne courbe, tirée arbitrairement, discontinue même, & compriſe ſous aucune équation algébrique, vérité qui devient d'autant plus évidente, que la ſolution ſynthétique de ce Problème que M. Euler paroît avoir choiſi à deſſein, conduit aux mêmes réſultats: Car elle fait voir qu'un corps engendré par le mouvement d'un demicercle inſiſtant verticalement au plan donné, & mené le long d'une ligne courbe quelconque, continue, ou discontinue, ſatisfait aux conditions du Problème; & c'eſt cette même ligne qui eſt repréſentée par la fonction arbitraire introduite par l'intégration de la fonction à deux variables, a laquelle a conduit la ſolution analytique du Problème. C'eſt auſſi dans cette circonſtance que réſide proprement la généralité de la ſolution, quoique pour cela le Problème ne ſoit pas indéterminé, comme quelques Géomètres ont cru que c'étoit le cas de tous les Problèmes qui conduiſent à des fonctions arbitraires.

La ſolution de ce Problème, auſſi bien que du Problème ſuivant plus général, où l'on demande des ſolides dont les Normales dans chaque point ſoyent dans un même rapport donné avec les élévations de chaque point au deſſus du plan donné, la ſolution, dis-je, de l'un & l'autre de ces deux Problèmes paroit très propre à confirmer la Théorie de l'Auteur ſur les fonctions arbitraires, dont l'admiſſibilité a été revoquée en doute par quelques Géomètres du premier rang. La ſolution ſynthétique de ce ſecond Problème conduit auſſi à des corps en-

engendrés par le mouvement de ſegmens de courbe d'une figure déterminée le long d'une ligne courbe abſolument arbitraire, continue ou diſcontinue; & la ſolution analytique mène à une fonction arbitraire repréſentée par cette même ligne courbe dont nous venons de parler.

VII.
Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat.

Auctore *L. Eulero*, pag. 95.

Ce petit Mémoire, dont le titre indique ſuffiſamment le ſujet, n'eſt pas ſuſceptible d'extrait: car il ſeroit impoſſible de ſe faire une idée de la ſolution que l'Auteur donne de ce Problème traité par beaucoup de Géomètres, ſans le ſuivre preſque pas à pas dans ſes calculs.

VIII.
Solution du Problème de trouver un cercle qui touche trois cercles donnés de grandeur & de poſition.

Par M. *Nicolas Fuſs*, pag. 102.

Dans une courte ébauche de l'hiſtoire de ce Problème, lequel peut avoir ſon utilité pratique dans l'horlogerie & dans la conſtruction des moulins, l'Auteur raconte que la lecture du Théorème dixième du quatrième livre des Collections Mathématiques de Pappus d'Alexandrie a donné à feu M. Euler l'occaſion de traiter le Problème des trois cercles qui fait le ſujet du Mémoire précédent. M. Fuſs dit qu'il avoit trouvé a peu près dans le même tems les deux ſolutions contenues

dans le préſent Mémoire: mais qu'il avoit déjà entièrement oublié ces ſolutions, lorsque les ſolutions récentes de M M. Lambert, Holland & Obéreit, publiées dans le cinquième volume de la correſpondance de feu M. Lambert, ſont venues les lui rappeller, & l'ont engagé à donner les ſiennes à la ſuite de la ſolution de M. Euler.

Dans la premiere ſolution l'Auteur parvient, par une voye aſſez facile, à une expreſſion pour le rayon du cercle cherché, qui, quoiqu'elle ne ſoit pas bien élégante & peu propre à être conſtruite, ne laiſſe pas de ſe prêter à toutes les applications poſſibles. La ſeconde ſolution conduit à une conſtruction géométrique très élégante qui ne paroit plus compliquée que celle de Viète dans ſon Appollonius Gallus, ou que celle de Newton dans ſon Arithmétique univerſelle, que parceque dans celles-ci on ſuppoſe déjà conſtruit le Problème d'un cercle qui touche deux cercles donnés & paſſe par un point donné de poſition.

IX.
Summatio ſeriei $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n +$ etc. denotante n numerum quemcunque integrum.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 114.

Pluſieurs Mathématiciens ſe ſont déjà occupés à trouver, par des routes diverſes, la ſomme de la ſérie infinie $1 - 2^n + 3^n - 4^n +$ &c. La Méthode que propoſe notre Académicien paroit cependant être plus ſimple, étant déduite des premiers principes du Calcul infinitéſimal: elle conſiſte en ce que la ſomme de la ſérie étant connue pour un ordre quelconque m, on en peut trouver très facilement celle de l'ordre ſuivant, où l'expoſant ſurpaſſe de l'unité celui du précédent

dent. L'Auteur paſſe enſuite à la ſommation de pareilles ſéries, où les ſignes des puiſſances des nombres impairs alternent, & c'eſt encore la même méthode qui l'y conduit.

X.

De proiectione Sphaeroidis ellipticae geographica.

Diſſertatio Secunda.

Proiectio ſtereographica horizontalis ſeu obliqua.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 123.

Après avoir examiné dans le premier Mémoire la projection droite & paralléle, l'Auteur paſſe ici à l'examen de la projection oblique ou horizontale, eû égard à la figure elliptique des Méridiens. Il détermine d'abord la projection du *Pole*, & trouve, que la différence entre les projections du pole, ſelon l'hypothèſe circulaire & elliptique, n'eſt que 0,0006 du rayon de la projection, quantité qu'on peut toujours négliger. Les projections des *Paralléles* deviennent des ellipſes, dont les grands axes ſont ſitués dans le Méridien même du Zénith, ou perpendiculaires à ce Méridien, ſelon que leur latitude eſt moindre ou plus grande que celle du Zénith. La projection du Paralléle du Zénith eſt un cercle, & celle du Paralléle dont la latitude eſt égale mais oppoſée à celle du Zénith, eſt une ligne droite perpendiculaire au Méridien du Zénith. La projection de l'*Equateur* eſt auſſi une ellipſe, qui devient ſemblable aux Méridiens elliptiques, ſi la latitude du Zénith eſt $= 5°.\ 23'.\ 28''$.

Les projections de tous les *Méridiens* ſont des ellipſes, hormis celle du Zénith qui eſt une ligne droite. Leur excentricité croit avec la latitude du Zénith, & tous leurs cen-

tres ſont ſitués dans une ligne droite perpendiculaire au Méridien principal, mais qui n'eſt pas la même que la projection du Paralléle, dont la latitude eſt égale à celle du Zenith, ce qui arrive dans la projection ſphérique.

L'*horizon* eſt une ellipſe, dont le grand axe eſt égal au diamétre de l'Equateur terreſtre $= 2a$, & le petit axe $= \frac{2a}{\sqrt{(\mathit{ſin}^2 \beta + m^2 \mathit{coſ}^2 \beta)}}$, β étant l'angle au centre de la ſphéroide compris entre l'equateur & le Zénith, & le nombre *m* indiquant le rapport du diamétre de l'Equateur terreſtre & de l'axe.

L'Auteur donne des formules pour les axes de ces ellipſes, & pour les points d'interſection avec le Méridien du Zénith, avec la ligne des centres, & avec l'horizon. Il ajoute enfin des régles prâtiques pour la projection, & détermine les rayons des cercles qu'on peut tracer par les points d'interſection, au lieu des ellipſes.

CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De motu oſcillatorio penduli circa axem cylindricum plano horizontali incumbentem.

Auctore *L. Eulero*, pag. 145.

Le pendule dont le mouvement eſt conſidéré dans le Mémoire préſent, doit être ſuppoſé fixé dans un cylindre dont les extrémités ſont appuyées ſur un plan horizontal aſſez raboteux, pour empêcher le cylindre de gliſſer ſur le plan; de cette façon le pendule n'aura point de frottement à vaincre, ni d'autre réſiſtance que celle de l'air à ſouffrir. M. Euler avoit déjà déterminé autrefois le mouvement d'un pareil pendule: on trouvera par exemple dans le ſecond ſémèſtre de nos Actes, pour l'année 1780, une diſſertation, où il conſidère ce mouvement d'une manière beaucoup plus générale. Ici ſon intention eſt principalement de déterminer la preſſion que l'axe cylindrique du pendule exerce ſur le plan horizontal, pendant qu'il fait ſes oſcillations, & la force que le frottement doit faire naître pour empêcher le cylindre de gliſſer ſur le plan. Ces deux forces ſont, à la verité, faciles à déterminer dans chaque cas, mais leurs expreſſions ſont un peu compliquées.

Quant à l'élément du tems d'une demie oſcillation, il eſt exprimé par une formule irrationnelle qui n'eſt pas inté-

grable dans toute ſa généralité, mais qui, reſtrainte au cas où les oſcillations ſont très petites, ſe laiſſe réduire à la quadrature du cercle.

II.

De motu progreſſiuo, rotatorio & oſcillatorio duorum corporum ope fili ſuper trochleam tranſeuntis connexorum.

Auctore *Iacobo Bernoulli*, pag. 154.

Pour ſe faire une idée du mouvement dont il eſt queſtion dans ce Mémoire, il faut s'imaginer deux corps, de figure quelconque, par les centres de gravité desquels eſt ſuppoſé paſſer un plan vertical qui partage chaque corps en deux parties ſemblables & égales. On ſuppoſe de plus que les deux corps ſoyent garnis de part & d'autre d'axes cylindriques qui ne paſſent point par les centres de gravité. Autour des extrémités de l'axe d'un de ces corps ſont entortillés, à diſtances égales du plan vertical, paſſant par les centres de gravité, deux fils qui paſſent ſur deux poulies égales & ſemblablement diſpoſées, & dont les autres extrémités enveloppent les extremités de l'axe de l'autre corps de la même manière qu'il a été dit de l'autre axe. Ce ſyſtème ainſi arrangé, on demande quel ſera le mouvement de chaque corps abandonné à lui même & à l'action de ſon camarade.

Il eſt d'abord évident que trois eſpèces de mouvemens peuvent avoir lieu ici: 1°) un mouvement progreſſif, en vertu duquel un corps doit monter, pendant que l'autre deſcend; 2°) un mouvement de rotation autour des axes, entant qu'ils ne paſſent point par les centres de gravité; & 3°) un mouvement oſcillatoire réciproque. Afin de ſe faciliter la recherche

che de ce triple mouvement, M. Bernoulli ſuppoſe d'abord les oſcillations très-petites, auſſi bien que les rayons des axes cylindriques, & il néglige le frottement; mais toutes ces réſtrictions ne ſont pas ſuffiſantes pour rendre le Problème réſoluble, vu qu'il contient encore douze variables, pour la détermination deſquelles l'Analyſe n'offre pas de moyens ſuffiſans. L'Auteur ſe voit donc obligé d'augmenter le nombre des réſtrictions, en ſuppoſant, que les axes cylindriques paſſent par les centres de gravité, moyennant, quoi le nombre des équations ſe trouve réduit jusqu'à ſept, desquelles l'on déduit, par quelques combinaiſons ingénieuſes, des concluſions aſſez intéreſſantes. On voit, par exemple, que la tenſion du fil reſte conſtamment la même, & que le mouvement tant vertical que rotatoire devient uniformement accéléré & n'affecte point le mouvement oſcillatoire qui en eſt indépendant. M. Bernoulli trouve auſſi un rapport bien ſimple entre l'intenſité de l'action & la peſanteur des corps.

Quant à l'eſpèce la plus intéreſſante des mouvemens de ces corps, ſavoir les oſcillations, l'Auteur ſe voit arrêté, dès le commencement de ſes recherches, par une équation différentielle du ſecond degré abſolument intraitable & qui, quoique M. Bernoulli en cherche l'intégrale par une ſérie infinie, n'eſt pas propre à donner une idée bien ſatisfaiſante de la nature du mouvement oſcillatoire.

Les autres méthodes connues d'approximation que l'Auteur eſſaye, n'ont pas un meilleur ſuccès, de ſorte que tout ce qu'il eſt en état de dire ſur les oſcillations de ces eſpèces de pendules à longueur variable, ſe réduit à une eſpèce de tautochronisme, qu'il nous y fait apperçevoir.

Une

Une derniere reſſource, à laquelle M. Bernoulli ſe voit dans la néceſſité d'avoir recours, c'eſt de ſuppoſer le tems d'une oſcillation infini, ou du moins très-grand, ſuppoſition qui ramène l'équation différentio-différentielle à l'homogénéité, & la rend, par conſéquent, intégrable; mais dans l'expreſſion tranſcendante finie, qui en réſulte, les deux quantités variables qui y entrent, ſavoir le tems & les élongations d'une oſcillation, ſont tellement entremélées, qu'on ne ſauroit déterminer l'une par l'autre. Cependant elle fait voir que les plus grandes excurſions ſont proportionnelles à la vîteſſe oſcillatoire, & que vers la fin elles deviennent auſſi proportionnelles au tems.

Dans un Supplément M. Bernoulli déclare que ce n'eſt qu'après avoir déjà achevé ſon Mémoire, que la Solution du même Problème, donnée par feu M. Euler, dans le ſecond ſémeſtre des Actes de l'Académie pour 1778, lui a été connue & qu'il auroit ſupprimé ſon travail, s'il n'en eût été détourné par la réflexion que ſon Mémoire contenoit au moins quelque choſe de nouveau. Et pour mettre le Lecteur en état d'en juger lui-même, il donne en extrait la ſolution de feu M. Euler.

III.

Recherches ſur un Problème de Mécanique.

Par M. *Nicolas Fuſs*, pag. 172.

Le Problème qui fait le ſujet de ce Mémoire concerne le mouvement d'une perche qui, appuyée contre un parois vertical, gliſſe, en tombant, le long d'un plancher horizontal, de façon que le corps obtient un mouvement gyratoire autour de ſon centre de gravité. Pour éviter les difficultés que le

le Problème, conſidéré dans toute ſa généralité pourroit avoir, l'Auteur ſuppoſe les deux plans, ſur lesquels gliſſent les extrémités de la perche, ſi unis qu'il n'y ait point de frottement.

Quoique l'équation tirée du principe de l'accélération angulaire ſoit très compliquée, après avoir tout réduit aux élémens de l'angle d'inclinaiſon de la perche, & du tems, & avoir fait ſortir du calcul les preſſions de la perche contre les deux plans, la premiere intégration réuſſit très bien, au moyen d'une heureuſe ſubſtitution, & l'équation qui exprime le rapport entre les premières différentielles du tems & de l'inclinaiſon devient aſſez ſimple; néanmoins l'élément du tems eſt exprimé par une formule irrationnelle qui ſe refuſe à toute autre voye d'intégration que celle des quadratures. Cependant l'Auteur détermine, par le moyen d'une ſérie très-convergente, le tems de la chûte entiere; & par des approximations ni trop longues, ni bien penibles il parvient à déterminer, avec beaucoup de préciſion, le mouvement d'une perche qui a ſon centre de gravité au milieu de ſa longueur, depuis le commencement du mouvement jusqu'à ſon extinction. M. Fuſs termine ſon Mémoire par l'obſervation: que le centre de gravité qui n'eſt pas au milieu, décrit, par ce mouvement, une Ellipſe, dont les diſtances des deux extrémités au centre de gravité ſont les demi-axes.

IV.

De motu et reactione aquae per tubos mobiles transfluentis.

Auctore *Jacobo Bernoulli*, pag. 185.

Le principe de la conſervation des forces vives, ſi fameux autrefois, par les ſervices qu'il a rendu aux Géomètres,

ſurtout à feu M. Daniel Bernoulli, dans la réſolution de pluſieurs Problèmes de Mécanique très difficiles, eſt presque entièrement négligé aujourd'huy, après que feu M. Euler & pluſieurs autres Géomètres ont appris à s'en paſſer, en ramenant la Mécanique à peu de principes directs, & en ſimplifiant leurs ſolutions par le perfectionnement de l'Analyſe.

C'eſt pour ſauver le principe mentionné d'un entier oubli que le digne Neveu de Daniel Bernoulli reprend ici une matière déjà traitée par feu M. Euler dans le VI[e] Volume des Nouveaux Commentaires. Son intention eſt de montrer que la même ſolution peut ſe déduire auſſi du principe de la conſervation des forces vives. Il commence pour cet effet, par calculer le cas, où tout le ſyſtème d'un tube tournant autour d'un axe, & élevant un poids, par la réaction de l'eau qui coule par ce tube, eſt déjà parvenu à l'uniformité du mouvement. Il fait deux ſuppoſitions différentes; dans l'une chaque élément d'eau, en entrant dans la tube, jouit déjà de toute la vîteſſe, avec laquelle il doit ſe mouvoir quand il vient d'y entrer; dans l'autre ſuppoſition cet élément eſt regardé comme étant d'abord en repos, & reçevant, au moment qu'il entre dans le tube, toute la vîteſſe néceſſaire pour qu'il ne puiſſe y naitre aucun vuide.

L'Auteur, d'après la premiere ſuppoſition, la ſeule que M. Euler ait traitée, parvient aux mêmes équations que cet illuſtre Géomètre; & pour les réſultâts de la ſeconde ſuppoſition, il fait voir qu'ils ſont auſſi d'accord. Il applique enſuite cette Théorie à la machine de M. Demour calculée par M. Euler dans le Tome VII. des Mémoires de l'Académie de Berlin, & il en tire les mêmes réſultâts que lui.

En-

Enfin, pour ne laiſſer lieu à aucun ſoupçon que le principe des forces vives ne ſoit auſſi fertile qu'on peut le déſirer, l'Auteur traite d'après ſes deux ſuppoſitions différentes, du mouvement & de la force du ſyſtème, quand ni la vîteſſe gyratoire du tube, ni celle de l'eau qui y coule, ne ſont encore devenues conſtantes; & il trouve derechef des équations conformes à celles de M. Euler pour le cas que ce Géomètre a conſidérés.

Dans une note l'Auteur croit démontrer, d'une manière convaincante, l'élaſticité de l'eau, comme un attribut néceſſaire de la fluidité.

V.

Remarques ſur un Problème de ſtatique aſſez connu.

Par *Nicolas Fuſs*, pag. 197.

Une ſolution du Problème de la courbe d'équilibration du Marquis de l'Hôpital, laquelle ſe trouve dans un Cours Allemand de Mathématique, publié à Vienne, a donné naiſſance à ce petit Mémoire. L'Auteur de l'ouvrage mentionné, M. Véga, Capitaine d'Artillerie, avantageuſement connu par ſes Tables de Logarithmes, & par les corrections de la plupart des Tables uſitées dont on lui eſt redevable, étoit parvenu, par une voye un peu longue, à une équation différentielle pour cette courbe, qui l'arrêta par ſa forme compliquée. M. Fuſs n'eut d'abord l'idée de réſoudre le Problème à ſa façon, que dans l'intention de comparer l'équation finie

n 2 de

de la courbe, qu'il ſavoit être très-ſimple, avec l'équation différentielle de M. Véga. Ces recherches l'ayant conduit à quelques remarques qui ne ſont pas déſtituées de tout intérêt, il s'eſt déterminé à communiquer ſa ſolution à l'Académie. Cette ſolution eſt accompagnée de la ſolution d'un Problème beaucoup plus général, tirée du principe de Statique que le commun centre de gravité de deux ou pluſieurs corps, qui ſe tiennent en équilibre, ne doit ni monter ni deſcendre. Quelques applications de cette ſolution générale à des courbes de figure déterminée, terminent le Mémoire.

CLAS-

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Nouvelles obſervations & expériences ſur l'irritabilité des étamines de l'épine vinette. (Berberis vulgaris L.).

Par M. *Koelreuter*, pag. 207.

M. Koelreuter décrit dans ce mémoire avec ſon exactitude ordinaire, les phénomènes variés qu'offre l'acte de fructification dans les fleurs de l'épine vinette: (Berberis vulgaris L.) D'abord la façon de laquelle les bourſes des anthères s'ouvrent, en élevant avec elles la pouſſiere fécondante qui leur reſte adhérente; puis cette eſpèce d'irritabilité qu'elles ont en commun avec les étamines de pluſieurs autres plantes ſurtout de la ſyngéneſie, & le mouvement de rapprochement qui en eſt la ſuite, & qui ſert à porter la pouſſiere ſur le ſommet du piſtille femelle. Il rapporte toutes les variations de ce mouvement, qui dans l'état naturel eſt excité par les inſectes qu'attire le miel de certaines petites glandes, placées à la baſe de chaque pétale des fleurs de l'épine vinette.

II.

De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio X. de ſtrato ſecundo fibrarum ventriculi ſiniſtri. Pars I.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 217.

L'Auteur donne dans cette premiere partie de ſa dixième diſſertation, la déſcription des fibres de la ſeconde couche

che du ventricule gauche en général. Ces fibres ſont analogues, dans leur ſituation & leur marche, aux fibres de la couche externe. Les deux couches prennent leur origine également des fils cartilagineux gauches & du bord ſupérieur de la cloiſon. L'une & l'autre s'inſére de même dans le bord inférieur de la cloiſon du coeur. La ſeule différence eſt, que les fibres de la couche externe occupent par leur inſertion, outre le dit bord inférieur de la cloiſon, encore un petit eſpace, ſavoir le côté du muſcle terminal inférieur, qui étant inſéré dans l'extrémité du bord inférieur de la cloiſon, augmente la ligne d'inſertion pour les fibres de la couche externe, tandis que les fibres de la ſeconde couche ſe terminent à l'extrémité même du bord de la cloiſon. Pour cet effet les extrémités de toutes les fibres de la ſeconde couche en s'inſérant dans le bord inférieur de la cloiſon, s'emparent des points de ce bord d'autant plus élevés ſur les points qu'occupent par leur inſertion les fibres de la couche externe qui leur répondent & qui commencent des mêmes points du bord ſupérieur, que le dernier point d'inſertion de toute la couche ſeconde eſt élevé ſur celui de la couche externe. Étant donc prouvé, que chaque fibre de la couche ſeconde prend ſon origine du même point dans le bord ſupérieur, que celle qui lui répond dans la couche externe, & qu'elle s'inſère au contraire dans un point plus élevé au bord inférieur; il ſuit néceſſairement, que toutes les fibres de la couche ſeconde s'approchent plus de la direction transverſale, ſi les fibres de la couche externe ont été obliquement deſcendantes, ou qu'elles s'élévent plus à la direction obliquement aſcendante, ſi celles-là ont été transverſales; de ſorte, que la direction des fibres des deux couches eſt très différente. Cependant avec tout cela elles reſtent, comme il eſt dit, analogues les unes aux autres. Car aucune des fibres de la

couche

couche ſeconde ne diffère plus en direction de celle, qui répond dans la couche externe, que toute autre de la même couche ſeconde diffère de la ſienne dans la couche externe, & partout les fibres des deux couches décrivent par leur marche de tours analogues. Après cette expoſition l'auteur définit plus exactement l'origine, la marche & l'inſertion des fibres de la ſeconde couche du ventricule gauche en général. Il parle enſuite de leur décuſſation avec les fibres externes & de leur concentration, en s'engageant de donner dans la ſuite la déſcription des divers faiſceaux, ou ordres de fibres, qui conſtituent cette couche ſeconde en particulier.

III.
Obſervationes anatomico-phyſiologicae Mytili cygnei L. ovaria concernentes.

Auctore *J. T. Koelreuter*, pag. 236.

M. Koelreuter ayant obſervé les ovaires des grandes moules de riviere, y a remarqué les embryons tous formés ſe mouvoir avec une vivacité extraordinaire & ouvrir les deux battans de leurs coquilles au point de les réduire dans un même plan. Cette liberté d'action eſt d'autant plus remarquable, que les petites moules, dès qu'elles ſont éclorres, ne ſauroient plus ouvrir leurs coquilles qu'à un angle très aigû, & que cependant dans l'ovaire, ces coquilles ſe trouvent déjà durcies, par une matiere calcaire que la calcination fait paroître.

IV.
De Schoerlo.

Auctore *Baſilio Severgin*, pag. 240.

Quoique l'auteur y traite l'hiſtoire naturelle du Schoerl en détail, ſon but principal n'eſt cependant, que de propoſer

ſes

ſes idées, ſur ce que les Minéralogiſtes en ont déja dit, ſans hazarder d'ailleurs d'en décider. Il diviſe ſon mémoire en douze paragraphes, dont le premier n'eſt qu'une introduction. Dans le ſecond il expoſe l'hiſtoire de ce que les Minéralogiſtes les plus célébres ont dit du Schoerl. Mais comme ce minéral, dont on a écrit beaucoup, a reçu des différens noms, il indique dans le troiſième paragraphe, le nom qu'il adopte: & après avoir touché en peu de mots, dans le quatrième, les eſpèces différentes qui lui ont été rapportées, il traite dans le 5, 6, 7, 8 & 9 paragraphe des qualités différentes de cette pierre, par lesquelles elle ſe diſtingue de toutes les autres. Il y expoſe ſes doutes contre ces Schoerls polyèdres & blancs de feu M. Ferber, & principalement contre les Schoerls blancs & transparens de M. de Sauſſure, & en rejettant même les Macles des François & les Schoerls cubiques de Cathérinenbourg, il n'admet que les ſept eſpèces, qui ſont décrites dans le paragraphe ſuivant. L'onzième contient une expoſition des différentes matrices, où cette pierre remarquable a été trouvée. Enfin le douzieme a pour objet ſa formation probable, que l'auteur dérive en plus grande partie de la voye humide, même dans les laves & autres matières volcaniques.

V.

De tela, quam dicunt, celluloſa, obſervationes.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 259.

Il eſt connû, que les diverſes parties du corps animal, comme les muſcles, les nerfs, les vaiſſeaux, les glandes, &c. ſont enveloppées & liées enſemble par une ſubſtance légere, très molle & ordinairement blanche, qu'on appelle le *tiſſu*

tiſſu cellulaire. On dit, que ce tiſſu eſt compoſé de petites lamelles & de fils, qui contiennent autant de petites cellules, communicantes entre elles par des trous, dont les parois des cellules, ou les lamelles, ſont perforées; de ſorte qu'un fluide contenu dans le tiſſu, puiſſe, en rampant de cellule en cellule, parvenir d'une partie du corps dans quelconque autre, quoique très éloignée. Les anatomiſtes ont bien décrit ce tiſſu ſelon toutes ſes propriétés & ſelon toutes les circonſtances; mais on ne trouve nulle part des expériences inſtituées exprès, pour prouver cette ſtructure cellulaire, comme on la lui attribue. On ne trouve pas même de ſimples obſervations anatomiques du tiſſu cellulaire, faites exprès pour connoitre exactement cette ſtructure & pour en rendre une idée nette; & les déſcriptions qu'on en a, ne contiennent que les idées de ce qu'on ſe ſouvient avoir vû comme en paſſant, en préparant d'autres parties du corps. C'eſt qu'on ne voit aucune partie auſſi ſouvant que le tiſſu qui enveloppe toutes les autres, & lequel, pour obſerver ces autres parties, il faut toujours en ſéparer. On croit donc connoitre aſſéz ce tiſſu, pour pouvoir le décrire exactement, ſans l'avoir devant les yeux; & on prend même pour certain, qu'en l'obſervant de nouveau, on ne verra pas plus, qu'on n'a déja vû mille fois.

Or après avoir examiné avec une attention plus ſoigneuſe ce tiſſu cellulaire, l'auteur n'a trouvé ni cellules, ni lamelles, ni trous ou pores, ni fils, ni tiſſu cellulaire, ni aucun tiſſu quelconque, mais une ſubſtance continue & uniforme, tranſparente ſous le microſcope & presque fluide, pourvûe de quelque ténacité, en ſorte qu'elle ſe laiſſe facilement étendre en fils. L'auteur a fait les mêmes recherches ſur la ſubſtance dite cellulaire, qui ſe trouve ſous la peau, ſur celle qui enveloppe les muſcles, les artères, les veines, les nerfs &c.

Partout il a trouvé la même choſe: une ſubſtance unie, preſque fluide, ductile, & transparente.

Mais comme ce tiſſu cellulaire eſt toujours ſitué entre d'autres parties qu'il lie enſemble, comme entre les muſcles, ou entre la peau & les muſcles, ou entre les muſcles & le périoſte des os &c.; il faut néceſſairement, pour le voir & pour l'obſerver, écarter & ſeparer un peu les deux parties qui le contiennent & le cachent. Mais en faiſant cela, on étend la ſubſtance demi-fluide & glutineuſe en fils: & ce ſont ces fils qu'on voit partout, quand on prépare les parties diverſes du corps, que l'anatomiſte forme lui-même, & qu'il prend pour naturels; ce ſont ces mêmes fils qui ont introduit l'idée du tiſſu cellulaire, que les auteurs ſe ſouvénant avoir vû pluſieurs fois, décrivent ſi circonſtantiellement, & que les anatomiſtes, les traitant & les tenant entre les mains tous les jours, n'examinent jamais.

L'auteur a pris deux muſcles d'un bras enveloppés comme ils le ſont naturellement, du tiſſu cellulaire & liés enſemble par cette même ſubſtance, ſans les avoir préparé comme on le fait ordinairement, c'eſt à dire, ſans les développer de leur tiſſu. La ſurface de ces muſcles apparut, comme ſi elle n'étoit couverte de rien, ſeulement que la rougeur étoit moins éclatante, & que les fibres ſe voyoient moins diſtinctement. Du reſte aucun tiſſu de fils ou de lamelles, rien de cellules ou de pores ne pouvoit être obſervé ſur ces ſurfaces des muſcles. On voit ce phénomène tous les jours ſans y penſer. Cependant il eſt clair, qu'une ſubſtance unie & transparente couvre la ſurface des muſcles; car en préparant ces muſcles, on la prend avec la pincette & on la ſepare d'eux pour voir plus diſtinctement leurs fibres, ce que l'auteur a auſſi fait dans cette expérience. Pour obſerver la portion du

tiſſu

tiſſu cellulaire, qui, contenue entre les deux muſcles, les lioit enſemble, l'auteur a écarté médiocrement les muſcles l'un de l'autre. Il a vû alors l'interſtice de deux ou trois lignes de largeur rempli d'une ſubſtance unie ſans cellules ou pores, ſans fils ou lamelles, ou autres parties quelconques. Il s'eſt ſervi du microſcope, encore n'a t'il obſervé ni cellules ni fils ou lamelles. C'étoit une ſurface unie, un peu concave, de couleur griſe & obſcure. Mais dès qu'il commençoit à tirer ces muſcles & à les ſéparer avec plus de force, il voyoit diſtinctement, comme la ſubſtance intermédiaire s'étendoit peu à peu en fils, qui au commencement étoient encore adhérents à la ſubſtance qu'elle couvroit, mais qui enfin ſi ſéparoient d'elle, & formoient des fils parfaits. Quand il laiſſoit les muſcles ſe rapprocher de rechef l'un de l'autre, les fils ſe confondoient de nouveau en ſubſtance unie: les muſcles tirés de nouveau, de nouveaux fils ſe formoient.

Quand on écarte les deux parties qui contiennent entre elles du tiſſu cellulaire, il arrive très ſouvant que l'air externe pénétre dans cette ſubſtance preſque fluide & douée de ténacité, & qu'il produit nombre de bulles ou véſicules aëriennes. Le même phénomème ſe fait voir, quand on enfle de l'air dans le tiſſu cellulaire, de la maniere qu'on le produit dans tous les fluides, principalement s'ils ſont pourvus de quelque degré de ténacité. Comme on a vu fréquemment ce phénomène, on l'a attribué à la ſtructure du tiſſu cellulaire. Même on a crû prouver cette ſtructure par le phénomène. L'air enfle les cellules, a-t'on dit, & éléve les lamelles qu'auparavant on ne pouvoit pas aſſez bien diſtinguer. Mais la moindre conſidération de la choſe rejette bientôt ce ſentiment. Car outre que les bulles ſont de très différente grandeur, & qu'on en voit ſouvent en même tems quelques unes de la grandeur d'un oeuf de poule, d'autres qui ne ſurpaſſent pas un pois en circon-

férence, & d'innombrables autres enfin diſperſées entre les plus grandes, qu'on ne peut voir qu'à l'aide du microſcope : auſſi voit on aſſez diſtinctement par le microſcope que ce ſont de vraies bulles, ou véſicules aëriennes, & point du tout des cellules organiſées qui communiquent entre elles.

On a la coutûme d'enfler des poumons, des rattes, ou d'autres parties, qui contiennent dans leur ſtructure beaucoup de tiſſu cellulaire ; de les ſecher après & de les couper en deux ou pluſieurs pieces, pour en voir l'interieur. Naturellement a-t'on vû nombre de petites feuilles, que des bulles ou véſicules aëriennes ſechées & coupées, la plûpart déchirées & corrompues de diverſes manieres par l'exſiccation, ont repréſentées, & on les a pris pour des lamelles, qui par leur compoſition forment les cellules. L'auteur croit que ce phénomène ſeul a donné la premiere idée des lamelles. Car dans un corps frais on ne trouvera jamais des lamelles ; ce ne ſont que des fils qu'on fait naitre en préparant, qu'on peut prendre pour un tiſſu cellulaire. Les bulles aëriennes ſont en partie trop grandes, pour qu'elles puiſſent répondre à l'idée qu'on a des lamelles & des cellules, en partie trop petites pourqu'on puiſſe les voit autrement que par le microſcope ; & celles qu'on pourroit trouver peut-être, comme ayant la grandeur dont on s'imagine qu'ont les lamelles & les cellules qu'elles contiennent, ne ſont pas des lamelles & des cellules, n'en ayant pas la figure, non plus que les plus grandes ou les plus petites. Ce ſont de vrayes bulles, qui ne laiſſent pas échapper l'air qu'elles contiennent, & beaucoup moins encore le fluide ſereux, le pus & d'autres matieres, qu'on ſuppoſe paſſer par le tiſſu cellulaire d'une partie du corps dans l'autre.

Cette

Cette ſubſtance, ou tiſſu cellulaire, comme on l'appelle, & qu'on dit être blanche, eſt eſſentiellement transparente & n'a aucune couleur. Mais quand l'air, en la pénétrant, produit des bulles en elle, ſa continuité eſt interrompue & elle paroit blanche: comme ſont tous les corps transparens, quand leur continuité eſt interrompue, p. ex. la glace, le verre briſé, l'eau même, quand elle eſt agitée en écume. Comme on ne voit presque pas le tiſſu que lorsqu'il eſt plein de cet air, qui s'eſt inſinué de dehors, car toujours faut il le tirailler pour le voir; il paroit presque toujours blanc. Cependant on l'obſerve auſſi ſouvent transparent & de couleur griſe. On le voit en général de diverſes manieres en diverſes circonſtances; mais de ſa nature il eſt toujours transparent. Le voit on ſans air, qui ſe ſoit inſinué, dans une fente profonde, entre deux muscles qu'il lie, où par le bas, la lumière n'a aucun accès, il paroit, comme tous les fluides transparens en de ſemblables cas, obſcur & présque noir. L'obſerve-t'on entre deux parties, bien tirées, & que l'air y a pu pénetrer, comme on le voit ordinairement, il eſt blanc comme de la neige. Eſt il vû ſous le microſcope, ſéparé d'autres parties, il paroit transparent comme le plus beau cryſtal. On n'en voit enfin presque rien, quand on l'obſerve ſur le muscle qu'il couvre, ou ſur d'autres parties qu'il enveloppe.

Ce ſont les propriétés de cette ſubſtance demi-fluide & glutineuſe en général. Elle eſt diverſement modifiée dans les divers endroits qu'elle occupe, comme ſous la peau, dans l'intérieur des muscles, &c. Ces details feront l'objet de quelques autres mémoires, que l'auteur ſe propoſe de donner dans la ſuite.

VI.

Mémoire ſur la maniere dont on fait l'acier des mines de fer de la Sibirie.

Par *Benoit - François - Jean Hermann.* Pag. 276.

Tout l'acier qui a été fait jusqu'ici en Ruſſie, eſt préparé de fer en barres, ou du déchet de fer blanc. Mais c'eſt en quoi les fabriques d'acier en Stirie nous diſputent le rang, parce qu'il eſt plus profitable de convertir, ſelon leur maniere, la mine de fer, ou le fer cru, directement en acier. Mr. l'Académicien Hermann, qui par ordre de Sa Majeſté devoit établir dans une des forges de la couronne aux monts d'Oural, une fabrique d'acier ſur le même pied que ſont celles de Stirie, donne ici la déſcription de cette méthode, comme il vient de l'introduire à Pyſchminsk, auprés de la rivière Pyſchma, 22 verſtes de Cathérinebourg. Il décrit tout le procédé de ce travail, & expoſe tant les regles que l'on doit obſerver, que les caractères par lesquels on reconnoit la bonne ou la mauvaiſe qualité de l'acier brut, qui eſt le produit immédiat du fer cru, pour être rafiné enſuite. Un fait particulier que l'auteur y obſerve, c'eſt qu'on ne reçoit jamais une bonne loupe ſans un fond de ſable, & qu'un fond de charbons comprimés la rend ferrugineuſe, ce qu'il attribue à la mauvaiſe qualité des mines, que l'on eſt contraint d'employer au haut four de Kamensk, d'où le fer cru eſt aporté. A l'égard des avantages de cette méthode, l'auteur remarque que d'un coté le matérial eſt d'un moindre marché, & que de l'autre on y conſume moins de charbons & moins de tems. Même l'acier eſt meilleur, il le compare au Scharſac - ſtahl de Stirie, ou au Guerb - ſtahl de Schmalcalde &c. La fabrique de Pyſch-

Pyſchminsk en a fourni environ 10000 pouds, depuis l'an 1786 jusqu'en 1789, dont la plûpart a été livrée & employée à la fabrique d'armes de Toula. Au reſte la théorie de la formation de l'acier, que l'auteur y adopte, conſiſte en ce que l'acier ne ſe fait, que lorsque le fer ſuffiſamment purifié eſt privé de ſon phlogiſtique ſuperflu.

CLAS-

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Problemata duo aſtronomica.

Auctore *F. T. Schubert.* Pag. 301.

Comme il y a des cas inombrables, où il eſt de la dernière importance, de connoitre la ſituation du méridien, & que la méthode ordinaire eſt fort incommode, à cauſe des inſtrumens qu'elle exige, & qui ne ſont jamais ſans des défauts qu'il n'eſt pas aiſé de découvrir & de corriger: une méthode de trouver la ligne méridienne par le ſeul moyen d'une pendule, doit être d'une grande utilité. C'eſt ce que l'auteur ſe propoſe dans le premier Problème, qui ſuppoſe qu'on ait obſervé la même étoile trois fois de ſuite; c'eſt à dire, qu'on ait obſervé deux angles azimuthaux & deux angles horaires correſpondans, ce qui ſe peut faire avec trois fils verticaux & une pendule. L'équation générale que l'auteur trouve pour réſoudre ce Problème, eſt du troiſieme degré; mais il conſidère deux cas particuliers, où l'équation devient du premier degré, ſavoir lorsque l'étoile eſt dans l'équateur même, & lors que les angles obſervés ſont très petits. Dans le dernier cas la réſolution n'eſt qu'une approximation.

Le ſecond Problème a pour but, de trouver la latitude d'un lieu par le moyen d'une pendule & d'un dioptre qu'on peut fixer dans un certain Almicantharat. La méthode ſe reduit à obſerver deux ou pluſieurs étoiles dans le même Almi-

micantharat, mais chacune deux fois, avant & après la culmination, & à remarquer pour chaque étoile l'intervalle du tems entre ces deux hauteurs égales. La ſimplicité de cette méthode, & ſon rapport avec la célébre méthode des *hauteurs correſpondantes*, ſaute aux yeux; mais elle différe de celle-ci en ce qu'on doit obſerver toutes les étoiles dans le même almicantharat. Pour pouſſer l'exactitude plus loin, on peut obſerver plus que deux étoiles, & prendre un milieu de toutes ces obſervations. Cette méthode a même des avantages ſur celle qui a été employée par M. Hell, & qu'on trouvera dans le mémoire même.

II.

Suite au mémoire ſur les Tables lunaires, inſéré au Tome V. des nouveaux Actes de l'Académie.

Par M. *Krafft*. Pag. 312.

M. Krafft a fait voir dans un mémoire précédent, comment on peut transformer les formules que donne la Théorie des inégalités du mouvement de la Lune: enſorte que les Tables conſtruites d'après elles acquierent plus de ſimplicité & que le calcul des lieux de la Lune en devienne conſidérablement abrégé: Mais il n'avoit traité dans ce premier eſſay que les formules trouvées par M. Euler pour les coordonnées de la ſeule longitude, & après en avoir déduit une nouvelle formule, qui en donne immédiatement la tangente par une ſérie des ſinus des argumens moyens, il étoit parvenu à transformer encore celle-ci en une autre, dont tous les termes, à l'exception d'une quantité invariable négative, étant affectés par les quarrés des ces ſinus, démeurent toujours poſitifs; d'où il réſulte le grand avantage que le calcul en dévient moins ſujet à des mépriſes.

Il reſtoit donc à notre Académicien de s'occuper encore d'une ſemblable transformation des formules qui repréſentent la latitude & la parallaxe horizontale de la Lune, & c'eſt ce qui fait le ſujet de ce ſecond mémoire.

En ſuppoſant qu'on ait déja trouvé l'équation totale qu'il faut appliquer à la longitude moyenne de la Lune, pour avoir ſa longitude vraïe réduite à l'ecliptique, M. Krafft deduit des deux formules données pour la latitude, une ſeule ſérie qui étant multipliée par le coſinus de l'équation totale de la longitude, donne immédiatement la tangente de la latitude. Mais quoique cette ſérie puiſſe encore être transformée en une autre, où tous les termes, à l'exception d'une ſeule quantité invariable, ſont toujours poſitifs, étant multipliés par les quarrés des ſinus des argumens moyens, il reſte le grand inconvénient, que ces argumens, à l'exception d'un ſeul, outre que leur nombre eſt conſidérable, ſont tous nouveaux; c'eſt à dire, qu'ils diffèrent tous de ceux que le calculateur a été obligé de former pour trouver la longitude. Mais comme ils n'en diffèrent que parceque l'argument moyen de la latitude y entre, M. Krafft trouve dans la decompoſition de leurs ſinus, un moyen aſſés facile de transformer ſa ſérie en deux autres, affectées l'une & l'autre par les ſeuls argumens de la longitude, dont la premiere doit être multipliée par le ſinus & la ſeconde par le coſinus de l'argument moyen de la latitude: & comme par une ſuite néceſſaire de cette transformation, le nombre des termes ſe réduit prèsqu'à la moitié, il en réſulte le double avantage que le calculateur ne peut non ſeulement tirer des mêmes tables les équations néceſſaires pour le calcul de la longitude & de la latitude à la fois, mais que ſon calcul devient encore par là beaucoup plus ſimple.

M.

M. Krafft transforme enſuite par un procédé tout à fait ſemblable & avec le même ſuccès, l'expreſſion de la parallaxe horizontale équatorienne; & il finit ſon mémoire par l'expoſition d'un type de calcul du lieu de la Lune pour le 12 Avril 1754 à $17^h. 23'. 54''$, temps moyen de Paris, tel que des tables conſtruites d'après ſes nouvelles formules le donneroient, & dont les réſultats s'accordent très-bien avec ceux qu'on trouve pour ce même exemple, par les tables de M. Euler. (*)

III.

De eclipſi ſolis, anno 1788 die $\frac{24}{4}$ *Maii*/*Iunii* obſeruata.

Auctore *Stephano Rumovsky*. Pag. 322.

L'Auteur expoſe d'abord les obſervations de cette eclipſe ſolaire telles qu'elles ont été faites à l'Obſervatoire de l'Académie par lui & par M. Tſchernoi ſon aide. Enſuite il en calcule pour le méridien de St. Pétersbourg, le moment de la conjonction du Soleil & de la Lune, en introduiſant des corrections indéterminées δ, y & π que peuvent recevoir, la ſomme des démidiamètres des deux corps, la latitude de la Lune, & ſa parallaxe équatorienne. De la même maniere ſoumettant au calcul les obſervations faites à Greenwich, Vienne, Prague, Marſeille, Cremsmünſter & Mitau, & combinant les expreſſions qui en réſultent pour le moment de la conjonction, notre Académicien obtient des équations, auxquelles ſemblent ſatisfaire au mieux les corrections $\delta = -5$, $y = -10$ & $\pi = 0$. Cependant en ſubſtituant ces valeurs dans les expreſſions trouvées par les obſervations de St. Pétersbourg, il en

P 2 vroit

(*) Leonh. Euleri nouae tabulae lunares ſingulari methodo conſtructae. Petropoli 1772. 8. pag. 65.

vroit que le moment du commencement de l'eclipſe s'écarte de la vérité de 6 ou 8, & celui de la fin de 14 ou 16 ſecondes de temps, ſelon qu'on ſuppoſe la différence des méridiens entre Greenwich & St. Pétersbourg de $2^h. 1'. 16$ ou $18''$. Ce qui ne peut avoir lieu en aucune maniere, ſurtout pour la fin, que M. le Conſ. de Cour Inochodzof a obſervée préciſement au même moment, dans un cabinet qui ſe trouve au deſſous de celui de M. le Conſ. de Collèges Roumovski, & qui ne diffère que de 4 ſecondes de celui de la fin que ſon aide a obſervée. Il paroit plutôt en ſuivre qu'il faudroit chercher pour les corrections δ, y & π d'autres valeurs, qui ſatisfiſſent mieux à l'obſervation de la fin de l'eclipſe, telle qu'elle a été faite à St. Pétersbourg, ſans être pourtant obligé de ſuppoſer dans les obſervations des autres endroits des erreurs ſenſibles. Pour cet effet il faudroit pouvoir ſousmettre au calcul encore d'autres obſervations, & ſurtout des obſervations qui ont été faites vers le Nord: c'eſt de quoi M. Roumovski ſe propoſe de s'occuper, dès que de pareilles obſervations ſeront parvenües à ſa connoiſſance. En attendant, ſuppoſant conforme à la vérité le moment de la conjonction tel qu'il a été deduit de l'obſervation de Greenwich à $20^h. 58'. 47''$. il ſuit du calcul de notre Académicien, que l'erreur des Tables lunaires de Mayer publiées à Londres, n'eſt que d'1 ſeconde ſouſtractive pour la longitude, & de 10 ſecondes additive pour la latitude.

IV.

Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1788. ſuivant le nouveau Stile.

Pag. 330.

La plus grande élévation du Barométre a été de $28\frac{8}{10}$ pouces de Paris le 25 Novembre, & la plus petite de $27\frac{18}{100}$ le 18 Octobre.

La

La hauteur moyenne eſt de 28,125 ou de 28$\frac{125}{1000}$; qui eſt de $\frac{22}{1000}$ plus grande que celle de l'année moyenne. Auſſi le Baromètre a-t'il été cette année-ci en 253 jours au deſſus de 28 pouces, tandis que dans l'année moyenne il ne ſe ſoutient que 200 jours au deſſus de cette hauteur.

Le plus grand froid a été de 196 degrés d'après la graduation de Délisle, qui répondent à un froid de 24$\frac{1}{2}$ degrés ſuivant Réaumur, le 20 Janvier & le 23 Décembre.

La plus grande chaleur a été de 100 degrés de Délisle qui font 26$\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur, le 18 Juillet après midi.

Le froid moyen à 6 heures du matin a été de 150$\frac{[illegible]}{15}$ degrés, ou d'$\frac{1}{2}$ degré de Réaumur, pour l'année entiere, & de 167$\frac{3}{5}$ degrés de Délisle ou de 9$\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur, pour les quatre mois d'hyver depuis le 1 Décembre 1787 jusqu'au 1 Avril 1788.

La chaleur moyenne à 2 heures après midi a été, pour l'année entiere de 140$\frac{1}{3}$ degr. d'aprés la graduation de Délisle qui répondent à une chaleur d'environ 5 degrés de Réaumur: & pour les quatre mois d'été, depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre 1788. de 131$\frac{7}{15}$ de Délisle, ou d'environ 10 degrés de Réaumur.

Le mois de Décembre a été un des plus froids à l'égard de l'intenſité du froid, dont la moyenne valeur ſurpaſſe 16$\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur à 6 heures du matin, & 12$\frac{1}{2}$ degrés à 2 heures après midi.

Le mois de Juillet s'eſt trouvé être le plus chaud: la chaleur moyenne a été à 2 heures après midi de 20 degrés, & à 6 heures du matin de 13 degrés de Réaumur.

Il y a eu un intervalle de 192 jours entre la premiere & la derniere gelée de l'hyver de 1787 à 1788. Et depuis cette derniere gelée en 1788, jusqu'an 13 Octobre où il recommença à geler, l'intervalle eſt de 152 jours.

Le vent dominant a éte celui de l'Eſt. Le mois de Juillet a été le plus calme & celui d'Octobre le plus venteux.

Il y a eu, 97 jours de ciel ſerein, 115 jours de ciel entièrement couvert, & 154 jours de ciel couvert en partie. Enſuite 57 jours de brouillard, 107 jours de pluie, 72 jours de neige, 7 jours de grèle, 11 jours d'orages; 10 aurores boréales & 4 parhélies.

Errata.

Errata

in Tomo VI. nouorum Actorum.

Pag.	16	lin.	7	loco	Z	lege	z.
—	64	—	6	—	altitudinis	lege	amplitudinis.
—	89	—	10	—	M N	—	E F.
—	95	—	2	—	Froblematis	—	Problematis.
—	96	—	ultima	—	coſ. p + coſ. q	—	coſ. p^2 + coſ. q^2.
—	102	—	1	—	Solvtion	—	Solution.
—	ibid.	—	6	—	Fvſs	—	Fuſs.
—	ibid.	—	7	—	29 Janv. 1789	—	27 Nov. 1788.
—	123	—	8	—	5 Mart. 1789	—	16 Oct. 1788.
—	197	—	6	—	Fvſs	—	Fuſs.
—	236	—	2	—	Phyſiologie	—	Phyſiologica.
—	ibid.	—	3	—	Chytili	—	Mytili.
—	ibid.	—	10	—	griſta	—	gr. iſta.
—	237	—	4	—	vivida	—	vivide.
—	ibid.	—	18	—	iuter	—	inter.
—	259	—	6	—	15 Mart.	—	28 Januar.
—	301	—	5	—	7 Jan. 1790	—	26 Oct. 1789.

MA-

MATHEMATICA.

DE
SINGVLARI RATIONE
DIFFERENTIANDI & INTEGRANDI
QVAE IN SVMMIS SERIERVM OCCVRRIT.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 18 *Mart* 1776.

§. 1.

Si Σx^n denotet ſummam progreſſionis cuius terminus generalis eſt poteſtas x^n, ita vt ſit

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + x^n$$

paſſim expoſitum reperitur quomodo ex qualibet ſumma poteſtatum inferiorum ſummae ſuperiorum formari queant, dum ſcilicet ſinguli termini formulae quae pro Σx^n fuerit inuenta, per certas fractiones multiplicantur, vt hoc modo ſumma ſequentis poteſtatis Σx^{n+1} obtineatur. Quod quo clarius appareat a poteſtate infima x^0 continuo ad altiores aſcendamus et ſingulis terminis cuiusque ſummae ſubſcribamus multiplicatores quibus ſequens ſumma producitur, hoc modo:

$\Sigma x^0 = x$

Mult. $\frac{1}{2}x, \frac{1}{1}x$

$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

Mult. $\frac{2}{3}x, \quad \frac{2}{2}x, \quad \frac{2}{1}x$

$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x$$
Mult. $\frac{3}{4}x,\ \frac{3}{3}x,\ \frac{3}{2}x,\ \frac{3}{1}x$

$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx + *$$
Mult. $\frac{4}{5}x,\ \frac{4}{4}x,\ \frac{4}{3}x,\ \frac{4}{2}x,\ \frac{4}{1}x$

$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + * - \tfrac{1}{30}x$$
Mnlt. $\frac{5}{6}x,\ \frac{5}{5}x,\ \frac{5}{4}x,\ \frac{5}{3}x,\ \frac{5}{2}x,\ \frac{5}{1}x$

$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 + * - \tfrac{1}{12}xx + *$$
Mult. $\frac{6}{7}x,\ \frac{6}{6}x,\ \frac{6}{5}x,\ \frac{6}{4}x,\ \frac{6}{3}x.\ \frac{6}{2}x\ \ \frac{6}{1}x$

$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + * - \tfrac{1}{6}x^3 + * + \tfrac{1}{42}x$$
Mult. $\frac{7}{8}x,\ \frac{7}{7}x,\ \frac{7}{6}x,\ \frac{7}{5}x,\ \frac{7}{4}x,\ \frac{7}{3}x,\ \frac{7}{2}x,\ \frac{7}{1}x$

$$\Sigma x^7 = \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{7}{12}x^6 + * -{}_{24}x^4 + * + \tfrac{1}{12}xx + *$$
Mult. $\frac{8}{9}x,\ \frac{8}{8}x\ \ \frac{8}{7}x,\ \frac{8}{6}x,\ \frac{8}{5}x,\ \frac{8}{4}x,\ \frac{8}{3}x,\ \frac{8}{2}x,\ \frac{8}{1}x,$

$$\Sigma x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{2}{3}x + * -{}_{15}x^5 + * - \tfrac{2}{9}x^3 + * - \tfrac{1}{30}x$$
etc.

§. 2. Ex his ſtatim perſpicitur, quomodo has operationes vlterius continuari oporteat; tantum notari debet in vltimis terminis cuiusque formulae exceptionem eſſe ſtatuendam, quippe qui vbique ita determinari debet, vt poſito $x = 1$ valor totius expreſſionis etiam vnitati prodeat aequalis. Quoniam enim omnes iſtae progreſſiones ab vnitate incipiunt, manifeſtum eſt poſito $x = 1$ ſummam ipſi termino primo aequalem fieri debere, atque ex hoc principio vbique vltimus terminus, qui ſemper ad poteſtatem primam x^1 refertur, erit definiendus. Ceterum perſpicuum eſt, hunc terminum vbique fore vltimum, quoniam poſito $x = 0$ ipſa ſumma neceſſario in nihilum abire debet. Praeterea notandum eſt loca vacua, vbi coëfficiens eſt $= 0$, aſteriscis * eſſe completa. Ita in expreſſione vltima Σx^8 in fine acceſſit terminus $-\frac{1}{30}x$, quoniam praecedentes omnes iun-

iunctim ſumti, poſito $x = 1$, producunt

$$\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} * - \tfrac{7}{15} * + \tfrac{2}{9} * = \tfrac{31}{30},$$

vnde patet vltimum terminum eſſe debere $= -\frac{1}{30}x$, vt tota ſumma euadat $= 1$.

§. 3. Quod ſi iam iſtos multiplicatores attentius conſideremus, facile perſpicitur, ex quolibet termino, per ſuum multiplicatorem ſubſcriptum multiplicato, idem reſultare productum, ac ſi ipſe ille terminus in ∂x ductus integraretur ac per numeratorem fractionis ſubſcriptae multiplicaretur. Quia igitur pro qualibet forma numeratores fractionum ſubſcriptarum ſunt aequales, ſumma ſequens prodibit, ſi praecedens in ∂x ducta integretur ſimulque per numeratorem reſpondentem multiplicetur. Ita erit

$$\Sigma x^1 = 1 \int \partial x \Sigma x^0,$$
$$\Sigma x^2 = 2 \int \partial x \Sigma x^1,$$
$$\Sigma x^3 = 3 \int \partial x \Sigma x^2,$$
$$\Sigma x^4 = 4 \int \partial x \Sigma x^3,$$
$$\Sigma x^5 = 5 \int \partial x \Sigma x^4,$$

etc.

ideoque in genere $\Sigma x^{n+1} = (n+1) \int \partial x \Sigma x^n$, ſi modo quovis caſu vltimus terminus rite adiiciatur, quippe quem integratio non exhibet, id quod in ſequente Problemate oſtendemus.

Problema.

§. 4. *Cognita ſumma ſeriei poteſtatum cuiusuis exponentis, ſcilicet*

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + x^n,$$

inuenire ſummam poteſtatum vno gradu altiorum, ſcilicet

$$\Sigma x^{n+1} = 1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1} + \ldots\ldots + x^{n+1}.$$

Solutio.

Quoniam ſumma cognita Σx^n eſt certa functio ipſius x, ea ducta in ∂x integretur, vt prodeat $\int \partial x \Sigma x^n$, quod integrale inſuper multiplicatum per $n + 1$ dabit ſummam quaeſitam $\int x^{n+1}$, ſi modo haec duplex rectificatio rite adhibeatur. Primo enim hoc integrale ita capi debet, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Deinde vero inſuper eiusmodi terminus formae αx addi debet, ita determinandus, vt poſito $x = 1$ ipſa quoque ſumma quaeſita fiat $\Sigma x^{n+1} = 1$. Ex quo patet iſtam rationem integrandi penitus ab integrationibus conſuetis abhorrere, propterea quod duplicem determinationem poſtulat, alteram ex caſu $x = 0$, alteram ex caſu $x = 1$ petendam.

§. 5. Vt igitur iſtam regulam clarius per exempla illuſtremus, a ſimpliciſſimis incipiamus, et cum eſſet $\Sigma x^0 = x$, erit $\int \partial x \Sigma x^0 = \frac{1}{2} x x$; vnde ſtatuatur $\Sigma x^1 = 1 . \frac{1}{2} x x + \alpha x$, et quia poſito $x = 1$ eſſe debet $\frac{1}{2} + \alpha = 1$, erit vtique $\alpha = \frac{1}{2}$. Deinde erit $\int \partial x \Sigma x = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x x$, quam ob rem ſtatui debet $\Sigma x^2 = 2 (\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x x) + \alpha x$, poſitoque $x = 1$ fieri debet $2 (\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) + \alpha = 1$, vnde reperitur $\alpha = \frac{1}{6}$. Hinc igitur porro erit $\int \partial x \Sigma x^2 = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x x$, quod integrale per 3 multiplicatum cum adiecto termino vltimo αx dabit

$$\Sigma x^3 = 3 (\tfrac{1}{12} x^4 + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{12} x x) + \alpha x,$$

vnde facto $x = 1$ fieri debet $3 (\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}) + \alpha = 1$, vnde fit $\alpha = 0$.

Scholion.

§. 6. Ecce ergo ſpecimen prorſus ſingulare integrationis hic ſe nobis offert, quippe quod duplici determinatione indiget, dum ſolitae integrationes vnicam tantum poſtulant. Verum hinc etiam in differentiationem ſingulare Phaenomenon influit: ſi enim ex qualibet ſumma Σx^{n+1}, tanquam cognita ſpecta-

ſpectata, ſummam praecedentem Σx^n elicere velimus, id quidem viciſſim per differentiationem fieri poterit, cum fiat $\Sigma x^n = \frac{\partial . \Sigma x^{n+1}}{(n+1)\partial x}$. Verum hic praeter morem ſolitum adhuc vna rectificatione eſt opus, quam ita inſtitui oportet, vt valor hinc reſultans euaneſcat poſito $x = 0$, quam operationem in ſequente Problemate explicemus:

Problema.

§. 7. *Cognita ſumma ſeriei poteſtatum cuiusuis exponentis*

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 2^n + 4^n + \ldots\ldots x^n$$

inuenire ſummam poteſtatum vno gradu inferiorum

$$\Sigma x^{n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots\ldots x^{n-1}.$$

Solutio.

Cum ex modo allatis pateat eſſe $\Sigma x^{n-1} = \frac{\partial . \Sigma x^n}{n \partial x}$, euidens eſt ex cognita ſumma Σx^n reperiri ſummam Σx^{n-1}, ſi illa differentietur eiusque differentiale per $n \partial x$ diuidatur. Verum hic quoque praeter morem ſolitum vna rectificatione eſt opus; quoniam enim omnes iſtae ſummae euaneſcere debent poſito $x = 0$, eiusmodi conſtantem hic adiici neceſſe eſt, vt formula inuenta euaneſcat poſito $x = 0$, id quod commodiſſime efficietur, ſi termini mere conſtantes, qui forte ex differentiatione prodeunt, ſtatim omittantur.

§. 8. Hanc operationem prorſus ſingularem quoque aliquot exemplis illuſtremus. Primo igitur cum ſit $\Sigma x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, erit eius differentiale $xx\partial x + x\partial x + \frac{1}{6}\partial x$, quod ergo per $2\partial x$ diuiſum, omiſſo termino vltimo vtpote conſtante, praebet $\Sigma x' = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$. Deinde cum ſit Σx^3 =

$= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x x$, eius differentiale erit $x^3 \partial x + \frac{3}{2} x x \partial x + \frac{1}{2} x \partial x$, quod per $3 \partial x$ diuiſum, quoniam nullus terminus conſtans adeſt, ſine vlla correctione praebebit $\Sigma x^2 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x x + \frac{1}{6} x$.

Scholion.

§. 9. En igitur aliud ſimile ſpecimen differentiationis hic occurrit, quod a more ſolito in hoc recedit, vt etiam differentiale correctione indigeat, dum integratio ante propoſita duplicem requirebat, ob quam circumſtantiam ambae iſtae operationes prorſus ſingulares omni attentione dignae videntur, idque eo magis, quod hactenus ex ſolis obſeruationibus per inductionem ſunt deriuatae; quamobrem maxime neceſſarium videtur, has operationes ſolida demonſtratione corroborare.

Demonſtratio operationum ſupra expoſitarum.

§. 10. Ex iis quae olim de ſummatione omnium progreſſionum, atque imprimis poteſtatum tradidi, valor formulae Σx^n in genere ſequenti modo expreſſus deducitur:

$$x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{n}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} x^{n-3}$$
$$+ \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-4)}{2 \cdot \ldots \cdot 6} \cdot \frac{1}{6} x^{n-5} - \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-6)}{2 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot \frac{3}{10} x^{n-7} + \text{etc.}$$

Quod ſi ergo hanc formam per $(n+1) \partial x$ multiplicemus & integremus, obtinebitur ſequens expreſſio:

$$\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{2} x^{n+1} + \frac{(n+1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} x^n - \frac{(n+1) n (n-1)}{2 \cdot \ldots \cdot 5} \frac{1}{6} x^{n-2}$$
$$+ \frac{(n+1) n (n-1) \ldots (n-3)}{2 \cdot \ldots \cdot 7} \cdot \frac{1}{6} x^{n-4} - \frac{(n+1) n (n-1) \ldots (n-5)}{2 \cdot \ldots \cdot 9} \cdot \frac{3}{10} x^{n-6}$$
$$+ \frac{(n+1) n (n-1) \ldots \ldots (n-7)}{2 \cdot \ldots \cdot 11} \cdot \frac{5}{6} \cdot x^{n-8} + \text{etc.}$$

quae

quae a praecedente aliter non diſcrepat, niſi quod numerus n vnitate ſit auctus, ea igitur verum valorem ſummae Σx^{n+1} exprimit.

§. 11. Quod autem nunc ad duplicem correctionem ſupra memoratam attinet, primo quidem patet in ipſa expreſſione Σx^n perpetuo terminum conſtantem, qui ibi ingrederetur, penitus eſſe omittendum, id quod ſemper vſu venit, quoties n eſt numerus impar, propterea quod per ipſam rei naturam ſumma ſemper euaneſcere debet poſito $x = 0$. Ita ſi eſſet $n = 3$, omitti debet terminus $-\frac{3.2.1.}{2.3.4.5.} \cdot \frac{1}{6} \cdot x^0$. Quando autem ſumimus integrale, huius termini ratio vtique erit habenda, quoniam inde oritur $-\frac{3.2.1.}{2.....5} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4x = -\frac{1}{30}x$, quem ergo terminum in ſumma ſequente Σx^{n-1}, vtique addi oportet, etiamſi non per integrationem ſit erutus. Cum autem conſtet poſito $x = 1$ ſummam ſemper primo termino, qui eſt 1, aequari debere, ex hac conditione iſte terminus ∂x tutiſſime definietur, ſine ſubſidio formae generalis.

§. 12. Hinc igitur ratio eſt manifeſta, cur huiusmodi integrationes duplicem rectificationem poſtulent, quarum ſcilicet altera efficiendum eſt vt ſumma inuenta euaneſcat caſu $x = 0$; tum vero etiam vt caſu $x = 1$ ipſa vnitati aequalis prodeat. Atque hinc ſimul intelligitur ratio, cur in differentiatione, quoties ad terminos conſtantes peruenitur, eos praetermitti oporteat. Ceterum tales operationes per differentiationem et integrationem procedentes non ſolum in ſeriebus poteſtatum locum habent, ſed etiam ad omnis generis progreſſiones extendi poſſunt, quemadmodum in ſequenti Problemate oſtendetur.

Problema.

§. 13. *Si fuerit X functio quaecunque ipſius x atque ſeriei, cuius terminus generalis* $= X$, *exiſtente x indice termini vltimi, cognita fuerit ſumma* $= \Sigma X$, *inuenire ſummam ſeriei cuius terminus generalis* $= \frac{\partial X}{\partial x}$.

Solutio.

Ex cognito termino generali X olim oſtendi terminum ſummatorium ita exprimi, vt ſit

$$\Sigma X = \int X \partial x + \tfrac{1}{2} X + \frac{A}{1.2.3} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{B}{1 \ldots 5} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C}{1 \ldots 7} \cdot \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D, etc. denotant numeros vulgo Bernoullianos dictos:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6};\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{691}{210},\ \tfrac{35}{2},\ \text{etc.}$$

Quod ſi iam pro altera ſerie, cuius terminus generalis proponitur $\frac{\partial X}{\partial x}$, loco X ſcribamus $\frac{\partial X}{\partial x}$, quia tum $\int X \partial x$ abit in X et ſingula differentialia ipſius X vno gradu euehuntur, prodibit iſtius ſeriei ſumma:

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = X + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{A}{1.2.3} \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} - \frac{B}{1 \ldots 5} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{C}{1 \ldots 7} \cdot \frac{\partial^6 X}{\partial x^6} - \text{etc.}$$

quae manifeſto ex forma praecedente oritur, ſi illa differentietur ac per ∂x diuidatur, ita vt ſit $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial . \Sigma X}{\partial x}$. Verum cum natura omnium ſummationum poſtulet, vt euaneſcente terminorum numero x, etiam ipſae fiant nihilo aequales, iſtam aequationem ita referri conueniet: $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial . \Sigma X}{\partial x} + C$, quam ſcilicet conſtantem C ita accipi oportet, vt ſumma quaeſita $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x}$ euaneſcat poſito $x = 0$, quod plerumque commodiſſime fiet, ſi, quando differentiatio formulae ΣX terminos conſtantes praebet, ii omittantur.

Corollarium.

§. 14. Hinc igitur patet ſignum ſummationis Σ ſimili modo ad ſignum differentiationis ∂ referri poſſe, quo ſignum

gnum integrationis $\int$. Quemadmodum enim eſt $\int \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial . \int X \partial x}{\partial x}$, ita videmus etiam eſſe $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial . \Sigma X}{\partial x}$. Hic autem conditionem memoratam, adiectione conſtantis C contentam, neutiquam obliuiſci oportet, quippe qua ingens diſcrimen inter huiusmodi relationes conſtituitur.

Exemplum 1.

§. 15. Ponamus terminum generalem ſeriei propoſitae eſſe $\frac{1}{x(x+1)}$, ita vt ſeries propoſita ſit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots\dots\dots + \frac{1}{xx+x},$$

cuius terminus ſummatorius eſt $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, ita vt ſit $\Sigma \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1}$. Nunc autem erit $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{(1+2x)}{(xx+x)^2}$, vnde naſcitur iſta ſeries:

$$-\frac{3}{4} - \frac{5}{36} - \frac{7}{144} - \frac{9}{400} \dots\dots\dots - \frac{(2x+1)}{(xx+x)^2}.$$

Huius igitur ſeriei terminus ſummatorius erit

$$\frac{1}{\partial x} \partial . \frac{x}{1+x} + C = \frac{1}{(1+x)^2} + C,$$

quae formula cum euaneſcere debeat poſito $x = 0$, ſumi debet $C = -1$, ita vt ſumma deſiderata iam ſit $-\frac{(2x+xx)}{(1+x)^2}$. Patet autem hinc ſumto $x = 1$ fore ſummam $= -\frac{3}{4}$, hoc eſt ipſi primo termino aequalem; ſumto autem $x = 2$ fore ſummam $= -\frac{8}{9}$, quae eſt aggregatum termini primi et ſecundi. At ſumto $x = 3$ fit ſumma $= -\frac{15}{16}$; aggregatum vero trium priorum terminorum eſt $-\frac{8}{9} - \frac{7}{144} = -\frac{135}{144} = -\frac{15}{16}$.

Exemplum 2.

§. 16. Sit propoſita ipſa ſeries ad quam in praecedente exemplo peruenimus:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} \dots\dots + \frac{2x+1}{(xx+x)^2},$$

vbi ergo eſt $X = \frac{2x+1}{(xx+x)^2}$, eius vero ſummam vidimus eſſe $\frac{2x+xx}{(x+1)^2}$. Hinc igitur erit $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{2-6x-6xx}{(xx+x)^3}$, vnde naſcitur haec ſeries: $-\frac{14}{8} - \frac{38}{216} - \frac{74}{1728} -$ etc. cuius ergo ſumma erit

$$\frac{1}{\partial x}\partial . \Sigma X = \frac{1}{\partial x}\partial . \frac{xx+2x}{(x+1)^2} + C = \frac{2}{(x+1)^3} + C,$$

vbi igitur ſumi debet $C = -2$, ita vt ſumma deſiderata ſit

$$= \frac{-6x - 6xx - 2x^3}{(1+x)^3} = \Sigma \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Sumamus igitur $x = 1$ ac prodibit primus terminus $= -\frac{14}{8}$. Sin autem capiatur $x = 2$, erit aggregatum primi et ſecundi termini $-\frac{52}{27}$. At ſumto $x = 3$ prodit $-\frac{126}{64} = -\frac{63}{32}$; ſumma autem trium primorum erit $-\frac{52}{27} - \frac{74}{1728} = -\frac{63}{32}$.

Scholion.

§. 17. Haec exempla ita ſunt aſſumta, vt ex termino generali ſumma per formam ſupra exhibitam non aliter niſi per ſeriem infinitam elici potuiſſet. Si enim poneremus $X = \frac{1}{xx+x}$, hinc primo deduceremus $\int X \partial x = l\frac{x}{1+x}$, differentialia vero nunquam euaneſcerent, ita vt inde vera ſumma, quae aliunde conſtat, deduci non poſſet. Huiusmodi autem exempla innumerabilia facillime formari poſſunt, dum ipſe terminus ſummatorius pro lubitu aſſumitur. Si enim in genere terminus ſummatorius ſtatuatur $= S$, functio quaecunque ipſius indicis x, tum ſi in eo loco x ſcribatur $x - 1$, ſumma illa prodire debet vltimo termino minuta, vnde vltimus, hoc eſt terminus generalis ſeriei obtinebitur, ſi a ſumma S ſubtrahatur eius valor qui prodit ſi loco x ſcribatur $x - 1$. Ita in primo exemplo erat $S = \frac{x}{1+x}$, quae expreſſio, loco x ſcribendo $x-1$, abit in $\frac{x-1}{x}$, quae fractio a priore ablata relinquit $\frac{1}{x(x+1)}$; qui eſt terminus generalis noſtrae ſeriei. Hinc igitur perſpicitur veritatem ſolutionis noſtri problematis neutiquam pendere

a forma, qua ſummam expreſſimus, ſed potius in ipſa natura ſummationis eſſe fundatam, id quod etiam de ſequente Problemate valebit.

Problema.

§. 18. *Si cognita fuerit ſumma ſeriei, cuius terminus generalis* $= X$, *functio quaecunque indicis* x, *inuenire ſummam ſeriei cuius terminus generalis* $= \int X \partial x$.

Solutio.

Cum igitur terminus generalis ſeriei propoſitae ſit $= X$, eius ſumma ſupra cognita habetur, eritque vt ante

$$\Sigma X = \int X \partial x + \tfrac{1}{2} X + \frac{A}{1.2.3} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{B}{1\ldots 5} \cdot \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C}{1\ldots 7} \cdot \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

Hinc igitur deducimus ſummam quaeſitam $\Sigma \int X \partial x$, ſi in illa expreſſione loco X vbique ſcribamus $\int X \partial x$, quo facto reperiemus:

$$\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \int X \partial x + \tfrac{1}{2} \int X \partial x + \frac{A}{1.2.3} \cdot X - \frac{B}{1\ldots 5} \cdot \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} + \frac{C}{1\ldots 7} \cdot \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

quae ſeries manifeſto ex illa formatur, ſi ea ducta in ∂x integretur, ita vt ſit $\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \Sigma X$. Verum hic duplex rectificatio accedere debet, altera vt ſumma quaeſita euaneſcat poſito $x = 0$, altera vero vt poſito $x = 1$ ſumma exhibeat ipſum terminum primum ſeriei, qui erit valor formulae $\int X \partial x$, ſumto $x = 1$, quamobrem vera expreſſio pro ſumma quaeſita erit

$$\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \Sigma X + C + D x,$$

vbi ambas conſtantes C et D per memoratas conditiones definire oportet.

Corollarium.

§. 19. Hinc igitur patet ſignum ſummationis Σ ſimili indole gaudere, qua ſignum integrationis, atque adeo haec ſigna

inter ſe permutari poſſe, cum ſit $\Sigma\int$ aequivalens $\int\Sigma$. Hic autem probe meminiſſe oportet, duplicem rectificationem inſuper eſſe adiungendam.

Exemplum.

§. 20. Sit propoſita progreſſio numerorum pentagonalium 1, 5, 12, 22, ... $\frac{3xx-x}{2}$, ita vt ſit $X = \frac{3xx-x}{2}$. Hinc cum ſit $\int X\partial x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}xx$, tum vero $\frac{\partial X}{\partial x} = 3x - \frac{1}{2}$ et $\frac{\partial\partial X}{\partial x^2} = 3$, ſequentia vero differentialia $= 0$, hinc obtinetur

$$\Sigma X = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}xx, + \tfrac{3}{4}xx - \tfrac{1}{4}x, + \tfrac{1}{12}(3x - \tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}xx.$$

Hinc iam formetur noua ſeries, cuius terminus generalis

$$= \int X\partial x = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{2},$$

vnde naſcitur haec ſeries:

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{2} + \tfrac{47}{4} \text{ etc. } \ldots\ldots \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{2}.$$

Eius igitur ſumma erit

$$\Sigma\int X\partial x = \int\partial x\,\Sigma X + C + Dx.$$

Iam vero ob $\Sigma X = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}xx$, erit $\int\partial x\,\Sigma X = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3$, ideoque ſumma quaeſita $= \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + C + Dx$, quae vt euaneſcat ſumto $x = 0$, fieri debet $C = 0$; at vt poſito $x = 1$ prodeat primus terminus $\frac{3}{4}$, ſumi debet $D = \frac{11}{24}$, ita vt vera ſumma ſit $\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{11}{24}x$. Ita ſi ſumamus $x = 2$, prodit $\frac{17}{4}$, quae eſt ſumma termini primi et ſecundi.

Scholion.

§. 21. Ex his facile intelligitur, tam differentiationem quam integrationem pro lubitu vlterius continuari poſſe, id quod breuiter ſequentibus duobus Theorematibus ſum complexurus.

Theorema I.

§. 22. Si termino generali X, qui ſcilicet indici x conueniat, reſpondeat terminus ſummatorius S; tum ſequentes ſummationes inde deriuantur:

I. Termino generali $\frac{\partial X}{\partial x}$ conueniet ſummatorius $= \frac{\partial S}{\partial x} + A$;

II. Termino generali $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2}$ conueniet ſummatorius $= \frac{\partial \partial S}{\partial x^2} + A$;

III. Termino generali $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$ conueniet ſummatorius $= \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + A$.

etc.

vbi littera A deſignat quantitatem conſtantem inde definiendam, vt hae ſummae euaneſcant poſito $x = 0$.

Theorema II.

§. 23. Si termino generali X conueniat terminus ſummatorius S, ſequentes ſummationes quoque locum habebunt:

I. Termino generali $\int X \partial x$ reſpondebit ſummatorius
$\int S \partial x + A + B x$;

II. Termino generali $\int \partial x \int X \partial x$ reſpondebit ſummatorius
$\int \partial x \int S \partial x + A + B x + C x^2$;

III. Termino generali $\int \partial x \int \partial x \int X \partial x$ reſpondebit ſummator.
$\int \partial x \int \partial x \int S \partial x + A + B x + C x^2 + D x^3$;

etc.

vbi litteras conſtantes A, B, C, D, etc. ita definiri oportet, vt caſibus $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. ſatisfiat, ſcilicet, vt poſito $x = 0$ ipſa ſumma euaneſcat; poſito vero $x = 1$ vt prodeat terminus primus; tum vt poſito $x = 2$ prodeat ſumma primi et ſecundi; et vt poſito $x = 3$ prodeat ſumma primi ſecundi et tertii, et ita porro. Semper autem praeſtabit quamlibet ſummam ex immediate praecedente definire, quoniam tum tantum duae conſtantes A et B prodeunt, quas facillime ex caſibus $x = 0$ et $x = 1$ definire licet.

METHODVS GENERALIS
INVESTIGANDI RADICES OMNIVM AEQVATIONVM PER APPROXIMATIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 25 April. 1776.

§. 1.

Si z quantitas incognita, cuius valor eruendus ſit ex aequatione quacunque, quam ſemper ſub forma $Z = 0$ exhibere licet, ita vt Z ſit certa quaedam functio ipſius z. Quaeritur igitur eiusmodi valor determinatus, qui ſi loco z ſcribatur, tum iſta functio Z reuera in nihilum ſit abitura. Veluti ſi propoſita fuerit haec aequatio: $z^3 = 3z + 2$, omnibus terminis ad eandem partem diſpoſitis erit $z^3 - 3z - 2 = 0$, ideoque functio propoſita $Z = z^3 - 3z - 2$. Quaeritur igitur eiusmodi valor, qui pro z ſubſtitutus iſtam functionem Z reuera nihilo aequalem reddat, id quod hoc caſu fieri manifeſtum eſt, ſi ſumatur $z = 2$.

§. 2. Sin autem propoſita tali aequatione $Z = 0$ loco z alius quiuis valor, puta v ſcribatur, ex quo functio Z valorem accipiat $= V$, tum vtique non erit $V = 0$: ſi enim prodiret $V = 0$, hoc ſignum foret valorem v veram eſſe radicem z. Ita in exemplo allato $Z = z^3 - 3z - 2$, ſi loco z ſcribamus 3, vt ſit $v = 3$, fiet $V = 16$, ideoque neutiquam $= 0$.

§. 3. Cum igitur, propoſita aequatione $Z = 0$, ſi loco z ſcribatur valor quicunque v, vnde fiat $Z = V$, non ſit $V = 0$, po-

ponamus eſſe $V = y$, eritque y functio quaedam cognita ipſius v, quae in nihilum eſſet abitura, ſi pro v verus valor radicis z acciperetur.

§. 4. Cum igitur $y = V$ ſit functio quaedam ipſius v, certa curua concipi poteſt, cuius abſciſſae $= v$ reſpondeat applicata $= y$. Permutatis igitur coordinatis, vt iam y exhibeat abſciſſam et v applicatam, iſta applicata v viciſſim ſpectari poterit tanquam certa functio ipſius y, quae ergo ita erit comparata, vt ſi capiatur $y = 0$, tum iſta applicata v ipſi radici quaeſitae z euadat aequalis, ſicque tota quaeſtio huc redit: quemnam valorem iſta ipſius y functio, ſcilicet v, ſit acceptura, ſi loco y ſcribatur 0? tum enim iſte valor ipſius v veram praebebit radicem z.

§. 5. Quoniam igitur v ſpectamus vt functionem ipſius y, ponamus more iam generaliter recepto $v = \Gamma : y$, atque ex natura differentialium notum eſt fore

$$\Gamma : (y + a) = \Gamma : y + \frac{a \partial . \Gamma : y}{\partial y} + \frac{a a \partial^2 . \Gamma : y}{1.2. \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 . \Gamma : y}{1.2.3. \partial y^3} + \text{etc.}$$

ideoque loco $\Gamma : y$ ſcribendo v habebimus

$$\Gamma : (y + a) = v + \frac{a \partial v}{\partial y} + \frac{a a \partial \partial v}{1.2. \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 v}{1.2.3. \partial y^3} + \frac{a^4 \partial^4 v}{1.2.3.4. \partial y^4} + \text{etc.}$$

in qua expreſſione elementum ∂y pro conſtanti accipitur. Siue cum v ſit functio ipſius y, ſi ſtatuamus $\frac{\partial v}{\partial y} = p$; $\frac{\partial p}{\partial y} = q$; $\frac{\partial q}{\partial y} = r$; $\frac{\partial r}{\partial y} = s$; ſicque vlterius in infinitum, adipiſcemur per quantitates finitas

$$\Gamma : (y + a) = v + a p + \tfrac{1}{2} a a q + \tfrac{1}{6} a^3 r + \tfrac{1}{24} a^4 s + \tfrac{1}{120} a^5 t + \text{etc.}$$

§. 6. Quia hic loco a quantitates quaſcunque aſſumere licet, ſumamus $a = -y$, atque $\Gamma : (y + a)$ eam functionem nobis exhibebit, quae ex forma $\Gamma : y$ reſultabit, ſi loco y ſcribatur $y + a$, hoc eſt $y - y = 0$. Vidimus autem tum v in ip-

ſam radicem quaeſitam z abire, ita vt ſit $z = \Gamma : (y - y)$; quocirca, ſi in ſerie inuenta loco a ſcribamus $-y$, reperiemus

$$z = v - py + \tfrac{1}{2}qyy - \tfrac{1}{6}ry^3 + \tfrac{1}{24}sy^4 - \tfrac{1}{120}ty^5 + \text{etc.}$$

§. 7. Quo hanc ſeriem ad vſum magis accommodatam reddamus, quantitatem y inde penitus excludamus. Cum enim ſit $y = V$ et V functio cognita ipſius v, ex eius indole habemus ſtatim $p = \frac{\partial v}{\partial V}$, quo valore inuento erit porro $q = \frac{\partial p}{\partial V}$, hincque vlterius $r = \frac{\partial q}{\partial V}$; $s = \frac{\partial r}{\partial V}$, et ita porro in infinitum. Quibus obſeruatis pro radice quaeſita ſequentem impetrabimus ſeriem infinitam:

$$z = v - pV + \tfrac{1}{2}qV^2 - \tfrac{1}{6}rV^3 + \tfrac{1}{24}sV^4 - \tfrac{1}{120}tV^5 + \text{etc.}$$

Huius autem ſeriei vſum aliquot exemplis illuſtrare operae erit pretium.

Exemplum I.

§. 8. Propoſita ſit haec aequatio quadratica: $zz = a$, ita vt ſeries quaeratur, quae aequalis ſit ipſi $z = \sqrt{a}$. Hic igitur erit $Z = zz - a$, hincque loco z ſcribendo v erit $V = vv - a$, ideoque $\partial V = 2v\,\partial v$. Hinc igitur ſequentes definiantur valores:

$$p = \frac{1}{2v};\; q = -\frac{1}{4v^3};\; r = \frac{3}{8v^5};\; s = -\frac{3.5}{16v^7};\; t = \frac{3.5.7}{32v^9};\; \text{etc.}$$

quibus inuentis pro radice quaeſita habebimus

$$\sqrt{a} = v - \frac{(vv-a)}{2v} - \frac{(vv-a)^2}{2.4.v^3} - \frac{3(vv-a)^3}{6.8.v^5} - \frac{3.5.(vv-a)^4}{24.16.v^7} - \frac{3.5.7.(vv-a)^5}{120.32.v^9} - \text{etc.}$$

Quodſi ergo aequationi propoſitae hanc tribuamus formam: $zz = bb + c$, ita vt ſit $z = \sqrt{(bb + c)}$, loco a vbique ſcribi debebit $bb + c$. Tum vero quia quantitas v ab arbitrio noſtro pendet, ſumamus $v = b$, vnde fiet $vv - a = -c$,

quo

quo facto radix quaeſita erit

$$\sqrt{(bb+c)} = b + \frac{c}{2b} - \frac{cc}{2.4.b^5} + \frac{3c^3}{6.8.b^5} - \frac{3.5c^4}{24.16.b^7} + \frac{3.5.7c^5}{120.32b^9} - \text{etc.}$$

eadem ſeries, quae per extractionem radicis, ex euolutione binomii, obtinetur. Quodſi igitur quaeratur $\sqrt{10}$, ſumatur $b=3$ & $c=1$, vnde colligitur

$$\sqrt{10} = 3 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{228} + \tfrac{1}{3888} - \text{etc.}$$

Cum igitur propemodum ſit $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6}$, ſeries multo magis conuergens eruetur, ponendo $b = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$; tum autem erit $c = -\frac{1}{36}$, vnde per ſolos duos priores terminos reperietur

$$\sqrt{10} = 3\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{12.19} = 3.\tfrac{37}{228},$$

cuius quadratum tam prope ad 10 accedit, vt error tantum ſit $\frac{1}{51984}$.

Exemplum II.

§. 9. Propoſita ſit haec aequatio: $z^n = a$, ita vt quaeratur $z = \sqrt[n]{a}$. Erit ergo $Z = z^n - a$, ideoque $V = v^n - a$ et $\partial V = n v^{n-1} \partial v$; quare litterae illae p, q, r, s, etc. ſequenti modo determinabuntur:

$$p = \frac{1}{n v^{n-1}}; \quad q = -\frac{(n-1)}{n n v^{2n-1}}; \quad r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3 v^{3n-1}};$$

$$s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4 v^{4n-1}}; \text{ etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis radix quaeſita erit

$$z = \sqrt[n]{a} = v - \frac{(v^n - a)}{n v^{n-1}} - \frac{(n-1)(v^n-a)^2}{2nn v^{2n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(v^n-a)^3}{6n^3 v^{3n-1}}$$
$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(v^n-a)^4}{24 n^4 v^{4n-1}} - \text{etc.}$$

 Haec

Haec ſcilicet ſeries ſemper evndem valorem exprimet, quicunque numerus loco v accipiatur, quippe qui penitus arbitrio noſtro relinquitur. Eo promptius autem iſta ſeries ad veritatem appropinquabit, quo minus poteſtas v^n a numero a diſcrepat.

Quodſi ergo fuerit $a = b^n + c$, conueniet ſumi $v = b$, tum enim erit $v^n - a = - c$ et ſeries radicem quaeſitam exprimens erit

$$\sqrt[n]{(b^n + c)} = b + \frac{c}{n b^{n-1}} - \frac{(n-1) c c}{2 n n b^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1) c^3}{6 n^3 b^{3n-1}}$$
$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1) c^4}{24 n^4 b^{4n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1) c^5}{120 n^5 b^{5n-1}} \text{ etc.}$$

quae ſeries etiam reperitur ex euolutione huius binomii $(b^n + c)^{\frac{1}{n}}$.

Exemplum III.

§. 10. Propoſita hac aequatione: $z^3 = z - 1$, inuenire ſeriem, quae valorem radicis z exhibeat? Hic ergo erit $Z = z^3 - z + 1$, ideoque $V = v^3 - v + 1$, vnde fit $\partial V = \partial v (3 v v - 1)$; quamobrem habebimus,

$$p = \frac{1}{3 v v - 1};$$
$$q = - \frac{6 v}{(3 v v - 1)^3};$$
$$r = \frac{6 (15 v v + 1)}{(3 v v - 1)^5},$$
$$s = - \frac{36 v \, 6 v v + 1)}{(3 v v - 1)^7};$$
etc.

His igitur valoribus ſubſtitutis colligetur:

$$z = \sqrt[3]{(z - 1)} = v - \frac{(v^3 - v + 1)}{3 v v - 1} - \frac{3 v (v^3 - v + 1)^2}{(3 v v - 1)^3}$$
$$- \frac{(15 v v + 1)(v^3 - v + 1)^3}{(3 v v - 1)^5} - \frac{15 v (6 v v + 1)(v^3 - v + 1)^4}{(3 v v - 1)^7} - \text{etc.}$$

vbi

vbi iterum quantitas v pro lubitu aſſumi poteſt; conueniet autem eam ita accipi, vt parum a valore radicis z diſcrepet. Ita ſi ſumamus $v = 1$, prodit $v^3 - v + 1 = 1$ et $3vv - 1 = 2$, vnde fit $z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$, qui autem valor ad veritatem parum accedit.

§. 11. Ex hoc autem exemplo patet, approximationem vix ſuccedere, niſi valor radici z proximus accipiatur, tum autem methodus vulgaris negotium multo commodius conficit. Interim tamen ſeries hac methodo inuentae maxime ſunt memorabiles, quoniam in infinitum continuatae ſemper eundem valorem pro z exhibent, quicunque numerus pro v fuerit aſſumtus. Imprimis autem haec methodus omnem attentionem meretur, quod non ſolum ſeries exhibeat pro ipſa radice, ſed etiam pro quibusuis eius poteſtatibus, id quod ſequenti problemate oſtendetur.

Problema.

Propoſita aequatione quacunque, quae ſit $Z = 0$, vbi Z ſit functio quaecunque ipſius z, inuenire ſeriem infinitam, quae non ſolum ipſam radicem z, ſed etiam eius poteſtatem quamcunque z^n exprimat.

Solutio.

§. 12. Ratiocinium inſtituatur vt ante, ſcilicet loco z ſcribatur quantitas quaecunque v, vnde Z abeat in V; et quatenus v non eſt radix aequationis propoſitae, eatenus V non in nihilum abibit. Ponamus igitur, vt ſupra, $V = y$, & etiam v ſpectari poterit vt functio ipſius y, quae ergo ita erit comparata, vt caſu, quo ponitur $y = 0$, fiat $v = z$, quandoquidem hoc caſu erit v vera aequationis radix.

§. 13. Simili vero modo etiam poteſtas v^n ſpectari poterit tanquam functio ipſius y, quae ergo, quando fit $y = 0$, ſiue quando loco y ſcribitur $y - y$, nobis largietur valorem poteſtatis quaeſitae z^n, quocirca, vt ſupra oſtendimus, erit

$$z^n = v^n - \frac{y \partial . v^n}{\partial y} + \frac{y y \partial^2 . v^n}{2 \partial y^2} - \frac{y^3 \partial^3 . v^n}{2.3.\partial y^3} + \frac{y^4 \partial^4 . v^n}{2.3.4.\partial y^4} - \text{etc.}$$

Hinc quia $y = V$, erit

$$z^n = v^n - \frac{V \partial . v^n}{\partial V} + \frac{V^2 \partial^2 . v^n}{2 \partial V^2} - \frac{V^3 \partial^3 . v^n}{2.3.\partial V^3} + \frac{V^4 \partial^4 . v^n}{2.3.4.\partial V^4} - \text{etc.}$$

§. 14. Vt iam hanc ſeriem a differentialibus liberemus, ſtatuamus $P = \frac{\partial . v^n}{\partial V} = \frac{n v^{n-1} \partial v}{\partial V}$; hincque porro formentur ſequentes valores;

$$Q = \tfrac{\partial P}{\partial V};\ R = \tfrac{\partial Q}{\partial V};\ S = \tfrac{\partial R}{\partial V};\ T = \tfrac{\partial S}{\partial V};\ \text{etc.}$$

quibus valoribus inuentis ſeries quaeſita poteſtatem z^n exprimens erit

$$z^n = v^n - V P + \tfrac{1}{2} V^2 Q - \tfrac{1}{6} V^3 R + \tfrac{1}{24} V^4 S - \tfrac{1}{120} V^5 T + \text{etc.}$$

vbi notandum eſt, poſtquam omnes iſti termini per v fuerint euoluti, tum loco v omnes plane quantitates aſſumi poſſe, ita vt nihilominus ſemper idem valor poteſtatis z^n inde reſultet.

§. 15. Cum iſta ſeries exprimat valorem ipſius z^n, poſito $n = 0$ ſeries noſtra praebere debet vnitatem, id quod de primo termino v^0 per ſe eſt perſpicuum; deinde quia littera P factorem habet n, etiam omnes ſequentes litterae per eundem exponentem n erunt multiplicatae, ſicque poſito $n = 0$ omnes ſeriei huius termini ſequentes ſponte euaneſcent.

§. 18.

§. 16. Hoc obſeruato praeter omnes poteſtates ipſius z etiam eius logarithmum hyperbolicum, ſcilicet lz, per huiusmodi ſeriem infinitam exhibere poterimus. Cum enim ſeriei inuentae omnes termini, poſt primum, factorem habeant n, eorum loco ſcribamus $n\,\Omega$, vt ſit $z^n = v^n + n\,\Omega$, hincque porro $\Omega = \frac{z^n - v^n}{n}$, cuius aequationis differentiale erit

$$\partial\,\Omega = z^{n-1}\,\partial z - v^{n-1}\,\partial v,$$

ſicque caſu $n = 0$ erit $\partial\,\Omega = \frac{\partial z}{z} - \frac{\partial v}{v}$, quae aequatio integrata praebet $\Omega = l\frac{z}{v}$, vnde colligimus $lz = lv + \Omega$, poſtquam ſcilicet in omnibus terminis, quibus Ω componitur, poſitum fuerit $n = 0$.

§. 17. Quodſi ergo Ω ſummam omnium terminorum caſu $n = 0$ denotet, vti aſſumſimus, ad numeros regrediendo, ſi e denotet eum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $z = v\,e^{\Omega}$, ergo $z = v^n\,e^{n\,\Omega}$. Hinc autem, ſi formula exponentialis $e^{n\,\Omega}$ more ſolito in ſeriem infinitam conuertatur, orietur

$$z^n = v^n\,(1 + n\,\Omega + \tfrac{1}{2}\,n\,n\,\Omega^2 + \tfrac{1}{6}\,n^3\,\Omega^3 + \tfrac{1}{24}\,n^4\,\Omega^4 + \text{etc.})$$

Quae ergo ſeries illi, quae ante eſt inuenta, aequalis eſſe debet. Quin adeo neceſſe eſt, vt facta euolutione litterae Ω ipſa ſeries ante inuenta prodeat, id quod exemplo declaraſſe iuuabit.

Exemplum.

§. 18. Propoſita aequatione $z^\lambda = a$, inuenire ſeriem tam pro alia quauis poteſtate z^n quam pro eius logarithmo hyperbolico? Hic ergo habebimus $Z = z^\lambda - a$, ideoque $V = v^\lambda - a$, ex quo fit $\partial V = \lambda\,v^{\lambda-1}\,\partial v$. Hinc iam litterae ante introductae P, Q, R, etc. ſequenti modo determinabuntur:

P =

$$P = \frac{n}{\lambda} v^{n-\lambda};$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-2\lambda};$$

$$R = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-3\lambda};$$

$$S = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-4\lambda}; \text{ etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſeries deſiderata erit

$$z^n = v^n - \frac{n}{\lambda} \cdot v^{n-\lambda} (v^\lambda - a) + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-\lambda)}{2\lambda} \cdot v^{n-2\lambda} (v^\lambda - a)^2$$
$$- \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-\lambda)}{2\lambda} \cdot \frac{(n-2\lambda)}{3\lambda} v^{n-3\lambda} (v^\lambda - a)^3$$
$$+ \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{2\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{3\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{4\lambda} \cdot v^{n-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{ etc.}$$

Poſito hic $n = 0$ erit

$$l z = l v - \frac{1}{\lambda} v^{-\lambda} (v^\lambda - a) - \frac{1}{2\lambda} v^{-2\lambda} (v^\lambda - a)^2$$
$$- \frac{1}{3\lambda} v^{-3\lambda} (v^\lambda - a)^3 - \frac{1}{4\lambda} v^{-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{etc.}$$

INNVMERAE AEQVATIONVM FORMAE, EX OMNIBVS ORDINIBVS, QVARVM RESOLVTIO EXHIBERI POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 6 Maii 1776.

§. 1.

Quoniam regulae generales pro reſolutione aequationum non vltra quartum gradum extenduntur, plurimum intererit, eiusmodi aequationum formas notaſſe, quas reſoluere liceat. Hic autem de eiusmodi aequationibus loquor, quae neque radices habeant rationales, neque per factores in aequationes ordinum inferiorum reſolui queant; quandoquidem facillimum foret innumerabiles huiusmodi aequationes reſolubiles proferre. Hanc ob rem eiusmodi aequationum ſpecies attentione dignae ſunt cenſendae, quarum reſolutio neceſſario extractionem radicum eiusdem ordinis, cuius eſt ipſa aequatio, poſtulat.

§. 2. Huiusmodi aequationes iam olim a Moivraeo pro ſingulis ordinibus in medium ſunt prolatae, quibus Scientia analytica non parum amplificata merito eſt putanda; deinde vero etiam ipſe plures tales aequationes in lucem protraxi: nuper autem ſe mihi obtulit methodus innumerabiles alias huius indolis aequationes eliciendi, quas ſpero Geometris haud ingratas eſſe futuras.

§. 3. Iſtas igitur aequationum formas, prouti ad eas ſum deductus, hic ordine proponam.

I. Si $x^2 = ab$, erit $x = \sqrt{ab}$.

II. Si $x^3 = 3abx + ab(a+b)$, erit $x = \sqrt[3]{aab} + \sqrt[3]{abb}$

III. Si $x^4 = 6abxx + 4ab(a+b)x + ab(aa+ab+bb)$, erit

$$x = \sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{aabb} + \sqrt[4]{ab^3}.$$

IV. Si $x^5 = 10abx^3 + 10ab(a+b)xx + 5ab(aa+ab+bb)x + ab(a^3+aab+abb+b^3)$, erit

$$x = \sqrt[5]{a^4b} + \sqrt[5]{a^3bb} + \sqrt[5]{aab^3} + \sqrt[5]{ab^4}.$$

V. Si $x^6 = 15abx^4 + 20ab(a+b)x^3 + 15ab(aa+ab+bb)xx + 6ab(a^3+aab+abb+b^3)x + ab(a^4+a^3b+aabb+ab^3+b^4)$, erit

$$x = \sqrt[6]{a^5b} + \sqrt[6]{a^4b^2} + \sqrt[6]{a^3b^3} + \sqrt[6]{aab^4} + \sqrt[6]{ab^5}.$$

VI. Si $x^7 = 21abx^5 + 35ab(a+b)x^4 + 35ab(aa+ab+bb)x^3 + 21ab(a^3+aab+abb+b^3)xx + 7ab \times$
$\times (a^4+a^3b+aabb+ab^3)x + ab(a^5+a^4b+a^3bb+aab^3+ab^4+b^5)$, erit

$$x = \sqrt[7]{a^6b} + \sqrt[7]{a^5bb} + \sqrt[7]{a^4b^3} + \sqrt[7]{a^3b^4} + \sqrt[7]{aab^5} + \sqrt[7]{ab^6}.$$

§. 4. Hinc iam facile colligitur in genere pro ordine quocunque

$$x^n = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}abx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}ab(a+b)x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}ab(aa+ab+bb)x^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}ab^3(aab+abb+b^3)x^{n-5} + \text{etc.}$$

fore

$$x = \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}bb} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^3} + \sqrt[n]{a^{n-4}b^4} + \text{etc.}$$

Vel ſi loco illorum coëfficientium ſcribamus breuitatis gratia n^{II}, n^{III}, n^{IV}, n^{V}, n^{VI}, etc. iſta aquatio generalis ſuccinctius ita exprimi

exprimi poterit:

$$x^n = n^{II}\, a b \left(\tfrac{a-b}{a-b}\right) x^{n-2} + n^{III}\, a b \left(\tfrac{a^2-b^2}{a-b}\right) x^{n-3} + n^{IV}\, a b \left(\tfrac{a^3-b^3}{a-b}\right) x^{n-4}$$
$$+ n^{V}\, a b \left(\tfrac{a^4-b^4}{a-b}\right) x^{n-5} + n^{VI}\, a b \left(\tfrac{a^5-b^5}{a-b}\right) x^{n-6} + \text{etc.}$$

tum vero etiam ipſa radix ita concinnius exprimi poterit, vt ſit

$$x = \frac{a \sqrt[n]{b} - b \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}},$$

quae ergo eſt aequatio generalis ad omnes ordines patens.

§. 5. Has aequationes in aliam formam transfundere licet, qua artificium, quod eo manuduxit, magis occultatur. Ponamus ſcilicet litterarum a et b productum $ab = p$, earumque ſummam $a + b = s$, hasque duas litteras p et s loco illarum a et b in calculum introducamus; tum autem erit $a = \frac{s + \sqrt{(ss - 4p)}}{2}$ et $b = \frac{s - \sqrt{(ss - 4p)}}{2}$. His iam nouis valoribus introductis aequationes ſuperiores ſpeciales ſequentes formas induent:

I. Si $x^2 = p$ erit, $x = \sqrt{p}$.

II. Si $x^3 = 3px + ps$ erit $x = \sqrt[3]{aab} + \sqrt[3]{abb} = \sqrt[3]{ap} + \sqrt[3]{bp}$.

III. Si $x^4 = 6pxx + 4psx + p(ss - p)$, erit
$$x = \sqrt[4]{aap} + \sqrt[4]{abp} + \sqrt[4]{bbp}.$$

IV. Si $x^5 = 10px^3 + 10psxx + 5p(ss - p)x + p(s^3 - 2sp)$, erit
$$x = \sqrt[5]{a^3 p} + \sqrt[5]{a p^2} + \sqrt[5]{b p^2} + \sqrt[5]{b^3 p}.$$

V. Si $x^6 = 15px^4 + 20psx^3 + 15p(ss - p)xx + 6p(s^3 - 2ps)$
$+ p(s^4 - 3ps^2 + pp)$, erit
$$x = \sqrt[6]{a^4 p} + \sqrt[6]{aapp} + \sqrt[6]{p^3} + \sqrt[6]{bbpp} + \sqrt[6]{b^4 p}.$$

VI. Si $x^7 = 21 p x^5 + 35 p s x^4 + 35 p (ss - p) x^3 + 21 p (s^3 - 2ps) xx + 7p(s^4 - 3pss + pp)x + p(s^5 - 4ps^3 + 3pps)$, erit

$$x = \sqrt[7]{a^5 p} + \sqrt[7]{a^3 pp} + \sqrt[7]{ap^3} + \sqrt[7]{bp} + \sqrt[7]{b^3 pp} + \sqrt[7]{b^5 p}.$$

etc.

§. 6. Quo nunc hanc formam generalem reddamus, obſeruandum eſt nouos coëfficientes litteris p et s contentos ſeriem conſtituere recurrentem, cuius ſcala relationis eſt $s - p$. Si enim ponamus:

$$Q = \frac{a^\lambda - b^\lambda}{a - b}, \quad Q' = \frac{a^{\lambda+1} - b^{\lambda+1}}{a - b} \text{ et } Q'' = \frac{a^{\lambda+2} - b^{\lambda+2}}{a - b},$$

manifeſto erit $Q'' = s\,Q' - p\,Q$, namque ob $s = a + b$ erit

$$s\,Q' = \frac{a^{\lambda+2} + b\,a^{\lambda+1} - a\,b^{\lambda+1} - b^{\lambda+2}}{a - b},$$

at ob $p = a\,b$ erit

$$p\,Q = \frac{a^{\lambda+1}\,b - a\,b^{\lambda+1}}{a - b},$$

qua forma ab illa ablata remanebit

$$s\,Q' - p\,Q = \frac{a^{\lambda+2} - b^{\lambda+2}}{a - b}.$$

Hac igitur lege obſeruata habebimus ſequentes transformationes:

$$\frac{a - b}{a - b} = 1; \qquad \frac{a^5 - b^5}{a - b} = s^4 - 3pss + pp,$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = s; \qquad \frac{a^6 - b^6}{a - b} = s^5 - 4ps^3 + 3pps,$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = ss - p; \qquad \frac{a^7 - b^7}{a - b} = s^6 - 5ps^4 + 6ppss - p^3,$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = s^3 - qsp; \qquad \frac{a^8 - b^8}{a - b} = s^7 - 6ps^5 + pps^3 - 4p^5 s,$$

etc.

§. 7. Ordo, quo iſtae formulae progrediuntur, iam ſatis eſt perſpicuus. Primo enim poteſtates ipſius s continuo binario de-

decreſcunt, contra vero ipſius p poteſtates vnitate creſcunt, ſignis alternantibus; coëfficientes autem numerici cuiusque termini conueniunt cum iis, quos iidem termini in euolutione binomii eſſent habiturae, vel, quod eodem redit, ii omnes permutationes litterarum p et s indicant, ita vt coëfficiens termini $p^\alpha s^\beta$ ſit $= \frac{1.2.3. \ldots \ldots (\alpha+\beta)}{1.2.3. \ldots \ldots \alpha \times 1.2.3. \ldots \ldots \beta}$. Hinc ergo deducimus transformationem ſequentem generalem:

$$\frac{a^{\lambda+1} - b^{\lambda+1}}{a-b} = s^\lambda - \frac{(\lambda-1)}{1} p\, s^{\lambda-2} + \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{1.2} p\, p\, s^{\lambda-4}$$

$$- \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)}{1.\;2.\;3} p^3 s^{\lambda-6} + \frac{(\lambda-4)(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1.\;2.\;3.\;4} p^4 s^{\lambda-8}$$

$$- \frac{(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda-8)(\lambda-9)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5} p^5 s^{\lambda-10} + \text{etc.}$$

§. 8. Quodſi ergo hos valores in aequatione generali ſupra §. 4 data ſubſtituamus, aequatio generalis, cuius reſolutionem hac methodo exhibere licet, talem habebit formam:

$$x^n = \frac{n(n-1)}{1.2} p\, x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3} p\, s\, x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4} p\,(ss-p)\, \lambda^{n-4}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5} p\,(s^3 - 2\,p\,s)\, x^{n-5}$$

$$+ \frac{n.\ldots.(n-5)}{1.2\ldots 6} p\,(s^4 - 3\,p\,s\,s + p\,p)\, x^{n-6} + \frac{n.\ldots.(n-6)}{1.2\ldots 7} p \times$$

$$\times\, (s^5 - 4\,p\,s^3 + 3\,p\,p\,s)\, x^{n-7} + \text{etc.}$$

Huius ſcilicet aequationis reſolutio, quicunque numeri pro p et s accipiantur, ſemper erit in poteſtate, eius quippe radix, poſtquam ex numeris p et s iſti fuerint deriuati:

$$a = \frac{s + \sqrt{(ss-4p)}}{2} \text{ et } b = \frac{s - \sqrt{(ss-4p)}}{2},$$

ita exprimetur vt ſit $x = \frac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$.

§. 9. Haec quidem formula vnicam radicem aequationis propoſitae nobis largitur, verum tamen facile hinc omnes plane radices eiusdem aequationis deducuntur, quarum quidem numerus

 eſt

eſt $=n$. Primo enim ponendo $b=ak$, radix illa reuocabitur ad vnicum ſignum radicale, cum hinc fiat $x=\frac{a\sqrt[n]{k}-b}{1-\sqrt[n]{k}}$. Nunc vero iſta radix, nempe $\sqrt[n]{k}$, valores diuerſos numero n admittit, quemadmodum etiam radix poteſtatis n ex vnitate, ſcilicet $\sqrt[n]{1}$, totidem diuerſos valores recipit, quorum vnus ſemper ipſi vnitati aequatur. Vnde ſi quilibet horum valorum deſignetur littera ϱ, ita vt ſit $\varrho^n=1$, iſta littera ϱ inuoluet n diuerſos valores, quorum quemlibet cum formula $\sqrt[n]{k}$ coniungere licet, ſcribendo ſcilicet eius loco $\varrho\sqrt[n]{k}$, quamobrem omnes plane radices aequationis propoſitae in hac formula continebuntur: $x=\frac{\varrho a\sqrt[n]{k}-b}{1-\varrho\sqrt[n]{k}}$, ſiue $x=\frac{\varrho a\sqrt[n]{b}-b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}-\varrho\sqrt[n]{b}}$; tum vero ſi haec formula per diuiſionem euoluatur, prodibit iſta expreſſio:

$$x=\varrho\sqrt[n]{a^{n-1}b}+\varrho^2\sqrt[n]{a^{n-2}bb}+\varrho^3\sqrt[n]{a^{n-3}b^3}+\text{etc.}$$

cuius expreſſionis numerus terminorum eſt $n-1$, vltimo exiſtente $\varrho^{n-1}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$.

§. 10. Operae pretium erit hanc rem exemplo illuſtraſſe. Sumamus igitur $n=5$, $s=1$ et $p=-1$, vt proponatur iſta aequatio quinti gradus:

$$x^5=-10x^3-10xx-10x-3,\ \text{ſiue}$$

$$x^5+10x^3+10xx+10x+3=0.$$

Ad huius ergo aequationis radices inueſtigandas, capiantur hi valores: $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; et $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, quibus inuentis erit quaelibet radix $x=\frac{\varrho a\sqrt[5]{b}-b\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}-\varrho\sqrt[5]{b}}$, vel introducendo litteram $k=\frac{b}{a}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, erit

erit $x = \frac{\varrho a \sqrt[5]{k} - b}{1 - \varrho \sqrt[5]{k}}$. Sin autem hanc formam euoluere velimus, ob $a b = p = -1$ reperiemus:

$$x = -\varrho \sqrt[5]{a^3} + \varrho^2 \sqrt[5]{a} + \varrho^3 \sqrt[5]{b} - \varrho^4 \sqrt[5]{b^3},$$

quae expreſſio penitus in numeris euoluta praebet

$$x = -\varrho \sqrt[5]{(2 + \sqrt{5})} + \varrho^2 \sqrt[5]{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} + \varrho^3 \sqrt[5]{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)} - \varrho^4 (2 - \sqrt{5})$$

Demonſtratio.
formularum ſupra datarum.

§. 11. Analyſis, quae ad iſtas aequationes perduxit, maxime eſt obuia, ita vt vix quicquam in receſſu habere videatur: tota enim petita eſt ex hac aequatione ſimpliciſſima: $\frac{(a + x)^n}{(b + x)^n} = \frac{a}{b}$. Cum enim hinc fiat $\frac{a + x}{b + x} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, inde colligitur incognita:

$$x = \frac{a - b \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - 1} = \frac{a \sqrt[n]{b} - b \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$$

quae eſt ea ipſa radix quam pro aequationibus ſuperioribus aſſignauimus.

§. 12. Quodſi vero aequationem illam aſſumtam euoluamus, quoniam inde fieri debet $a(x + b)^n = b(x + a)^n$, ſiue $a(x + b)^n - b(x + a)^n = 0$, hinc deriuabitur ſequens aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} a x^n + \frac{n}{1} a b x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a b b x^{n-2} \\ \qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a b^3 x^{n-3} + \text{etc.} \\ - b x^n - \frac{n}{1} a b x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a a b x^{n-2} \\ \qquad - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b x^{n-3} - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0,$$

vbi

vbi membra ſecunda ſe mutuo tollunt. Iam quia primum membrum afficitur per $a - b$, reliqua membra in alteram partem transferantur, ac per $a - b$ diuidantur, ſicque emerget ſequens aequatio:

$$x^n = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\, a\, b \left(\frac{a-b}{a-b}\right) x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\, a\, b \left(\frac{aa-bb}{a-b}\right) x^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\, a\, b \left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right) x^{n-4} + \text{etc.}$$

quae eſt ipſa aequatio generalis ſupra tractata, cuius ergo radix eſt $x = \frac{a\sqrt[n]{b} - b\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$.

§. 13. Hinc forte quispiam expectare poſſet, ſimili modo huiusmodi aequationes generaliores obtineri poſſe, ſi loco illius formulae ſimpliciſſimae haec formula latius patens: $\frac{(f+x)^n}{(g+x)^n} = \frac{a}{b}$, fundamenti loco conſtituatur, ſiquidem hic quatuor quantitates arbitrariae a, b, f et g, in computum introducuntur, cum ante binae tantum a et b ineſſent; verum tamen quomodocunque litterae f et g a litteris a et b diuerſae accipiantur, tamen caſus ſemper ad priorem ſimpliciorem reduci poteſt. Ad hoc oſtendendum ponamus $x = \alpha + \beta z$, et aequatio noſtra fiet $\frac{(\alpha + f + \beta z)^n}{(\alpha + g + \beta z)^n} = \frac{a}{b}$, ſiue $\frac{\left(\frac{\alpha + f}{\beta} + z\right)^n}{\left(\frac{\alpha + g}{\beta} + z\right)^n} = \frac{a}{b}$; atque nunc manifeſtum eſt, quantitates α et β ſemper ita capi poſſe, vt fiat $\frac{\alpha + f}{\beta} = a$ et $\frac{\alpha + g}{\beta} = b$, quandoquidem hinc deducitur $\alpha = \frac{bf - ag}{a - b}$, ideoque $\beta = \frac{f - g}{a - b}$. Sicque formula illa, quae multo generalior videbatur, ſemper ad ſimpliciſſimam illam ſupra tractatam reuocari poteſt, neque idcirco quicquam noui inde eſt expectandum.

Anno-

Annotatio.

in aequationes ſupra euolutas.

§. 14. Si formas, quas pro radicibus harum aequationum ſupra aſſignauimus, accuratius perpendamus, haec omnia egregie conuenire deprehenduntur, cum coniectura illa, quam olim in medium proferre ſum auſus, dum pro reſolutione aequationis cuiuscunque gradus, in qua ſecundus terminus deſit, veluti

$$x^n = p\,x^{n-2} + q\,x^{n-3} + r\,x^{n-4} + \text{etc.}$$

affirmaui, ſemper dari aequationem reſoluentem vno gradu inferiorem, huius formae:

$$y^{n-1} - A\,y^{n-2} + B\,y^{n-3} - C\,y^{n-4} + D\,y^{n-5} - \text{etc.} = 0,$$

cuius radices, numero $n-1$, ſi fuerint α, β, γ, δ, ε, etc. futurum ſit

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \sqrt[n]{\delta} + \text{etc.}$$

§. 15. Cum igitur pro forma generali, quam ſupra tractauimus, radix inuenta ſit

$$x = \sqrt[n]{a^{n-1}\,b} + \sqrt[n]{a^{n-2}\,b\,b} + \sqrt[n]{a^{n-3}\,b^3} - - - + \sqrt[n]{a\,b^{n-1}},$$

hinc ſequitur aequationis reſoluentis ordinis $n-1$ radices fore $a^{n-1}\,b$; $a^{n-2}\,b\,b$; $a^{n-3}\,b^3$; $a^{n-4}\,b^4$; - - - - $a\,b^{n-1}$, quae ergo erunt valores ipſius y. Quare cum coëfficiens A ſit ſumma omnium harum radicum, erit $A = \frac{a\,b\,(a^{n-1} - b^{n-1})}{a - b}$, poſtremum autem huius aequationis membrum abſolutum erit productum ex omnibus his radicibus, quod ergo erit $= a^{\frac{nn-n}{2}} \times b^{\frac{nn-n}{2}}$. Pro reliquis terminis percurramus aequationes particulares ſupra expoſitas.

I. Pro aequatione tertii gradus:

$$x^3 = 3\,a\,b\,x + a\,b\,(a+b)$$

vbi erat radix

$$x = \sqrt[3]{a\,a\,b} + \sqrt[3]{a\,b\,b}.$$

Hic ſi aequatio reſoluens ſtatuatur

$$y\,y - A\,y + B = 0,$$

eius radices erunt $a\,a\,b$ et $a\,b\,b$, ideoque $A = a\,b\,(a+b)$ et $B = a^3\,b^3$.

II. Pro aequatione quarti gradus:

$$x^4 = 6\,a\,b\,x\,x + 4\,a\,b\,(a+b)\,x + a\,b\,(a\,a + a\,b + b\,b)$$

Hic eſt radix

$$x = \sqrt[4]{a^3\,b} + \sqrt[4]{a\,a\,b\,b} + \sqrt[4]{a\,b^3},$$

vnde ſi aequatio reſoluens ſtatuatur

$$y^3 - A\,y\,y + B\,y - C = 0,$$

eius radices erunt $a^3\,b$; $a\,a\,b\,b$; $a\,b^3$, quocirca habebimus

$$A = a\,b\,(a\,a + a\,b + b\,b),$$
$$B = a^3\,b^3\,(a\,a + a\,b + b\,b) \text{ et}$$
$$C = a^6\,b^6.$$

III. Pro aequatione quinti gradus:

$$x^5 = 10\,a\,b\,x^3 + 10\,a\,b\,(a+b)\,x\,x + 5\,a\,b\,(a\,a + a\,b + b\,b)\,x + a\,b\,(a^3 + a\,a\,b + a\,b\,b + b^3),$$

Hic igitur erit

$$x = \sqrt[5]{a^4\,b} + \sqrt[5]{a^3\,b\,b} + \sqrt[5]{a\,a\,b^3} + \sqrt[5]{a\,b^4},$$

vnde ſi aequatio reſoluens ſtatuatur:

$$y^4 - A\,y^3 + B\,y\,y - C\,y + D = 0,$$

eius radices erunt, $a^4\,b$; $a^3\,b\,b$; $a\,a\,b^3$; $a\,b^4$; vnde colligitur fore

fore $A = ab(a^3 + aab + abb + b^3)$,

$B = a^3 b^3 (a^4 + a^3 b + 2aabb + ab^3 + b^4)$,

$C = a^6 b^6 (a^3 + aab + abb + b^3)$,

$D = a^{10} b^{10}$.

IV. Pro aequatione ſexti gradus:

$$x^6 = 15abx^4 + 20ab(a+b)x^3 + 15ab(aa+ab+bb)xx$$
$$+ 6ab(a^3+aab+abb+b^3) + ab(a^4+a^3b+aabb+ab^3+b^4),$$

Hic igitur habebitur

$$x = \sqrt[6]{a^5 b} + \sqrt[6]{a^4 bb} + \sqrt[6]{a^3 b^3} + \sqrt[6]{aab^4} + \sqrt[6]{ab^5}.$$

vnde ſi aequatio reſoluens ſtatuatur

$$y^5 - Ay^4 + By^3 - Cyy + Dy - E = 0,$$

eius radices erunt $a^5 b$; $a^4 bb$; $a^3 b^3$; aab^4; ab^5, vnde colligitur fore

$A = ab(a^4 + a^3 b + aabb + ab^3 + b^4)$,

$B = a^3 b^3 (a^6 + a^5 b + 2a^4 bb + 2a^3 b^3 + 2aab^4 + ab^5 + b^6)$,

$C = a^6 b^6 (a^6 + a^5 b + 2a^4 bb + 2a^3 b^3 + 2aab^4 + ab^5 + b^6)$,

$D = a^{10} b^{10} (a^4 + a^3 b + aabb + ab^3 + b^4)$,

$E = a^{15} b^{15}$.

vbi formulae mediae B et C ita concinnius exprimi poſſunt:

$B = a^3 b^3 (aa + bb)(a^4 + a^3 b + aabb + ab^3 + b^4)$ et

$C = a^6 b^6 (aa + bb)(a^4 + a^3 b + aabb + ab^3 + b^4)$,

quae determinationes fortaſſe aliquam lucem accendere poſſunt ad reſolutionem aequationum generalem feliciori ſucceſſu tractandam.

DE CVRVIS ALGEBRAICIS, QVARVM LONGITVDO EXPRIMITVR HAC FORMVLA INTEGRALI

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}.$$

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 17 Iun. 1776.

§. 1.

Cum methodus certa huiusmodi problemata ſoluendi, quibus curuae algebraicae requiruntur, quarum longitudo per datam formulam integralem exprimatur, etiamnunc denſiſſimis tenebris ſit inuoluta, plurimum ad fines Analyſeos amplificandos ſine dubio conferet, ſi plura huius generis problemata particularia omni ſtudio euoluantur, ſiquidem tum demum ſperare licebit, fore vt tandem haec myſteria Analyſeos vlterius penetremus. Hunc in finem conſtitui formulam propoſitam accuratius perſcrutari, cuius quidem duo caſus nulla prorſus laborant difficultate: alter ſcilicet, quando $m = 2n$, vel etiam $m = 4n$, vel $m = 6n$, etc. quia tum formula integrationem admittit, ideoque omnes plane curuae algebraicae rectificabiles ſatisfacere ſunt cenſendae; alter vero eſt $m = n$, tum enim noſtra formula, poſito $v^n = z$, abit in

in hanc: $\frac{\partial z}{n\sqrt{(1-zz)}}$, ideoque arcum circularem refert. Conſtat autem iam ſatis praeter circulum nullas alias lineas curuas algebraicas ſatisfacere poſſe.

§. 2. Vt autem noſtram quaeſtionem in genere ſolvamus, deſignemus coordinatas curuarum quaeſitarum litteris x et y, ipſos autem earum arcus littera s, ita vt ſit $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$; et quaeſtio huc redit, vt pro x et y eiusmodi functiones algebraicae quantitatis v inueſtigentur, vt inde fiat $\partial s = \int \frac{v^{m-1}\,\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$, cui quidem quaeſtioni ſatisfieri poſſet, ſi eiusmodi angulos ω aſſignare liceret, vt ambae iſtae formulae: $\partial x = \frac{v^{m-1}\,\partial v \operatorname{coſ.}\omega}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$ et $\partial y = \frac{v^{m-1}\,\partial v \operatorname{ſin.}\omega}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$, euaderent integrabiles. Verum nulla via patet in huiusmodi angulos inquirendi, niſi ipſa formula propoſita ante in aliam formam ad calculum angulorum magis accommodatam transformetur.

§. 3. Hunc in finem ſtatuamus $v^n = \operatorname{ſin.}\Phi$, vt fiat $\sqrt{(1-v^{2n})} = \operatorname{coſ.}\Phi$, tum vero erit $v^m = \operatorname{ſin.}\Phi^{\frac{m}{n}}$, vbi breuitatis gratia faciamus $\frac{m}{n} = \alpha + 1$, vt ſit $v^m = \operatorname{ſin.}\Phi^{\alpha+1}$, vnde differentiando erit

$$m v^{m-1}\,\partial v = (\alpha+1)\,\partial\Phi \operatorname{coſ.}\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^{\alpha},$$

ita vt nunc formula reſoluenda proditura ſit

$$\partial s = \frac{\alpha+1}{m}\,\partial\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^{\alpha} = \frac{1}{n}\,\partial\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^{\alpha}.$$

Quo autem hoc negotium facilius expediamus, duas ſequentes formulas:

$$z = \operatorname{ſin.}\lambda\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^{\alpha+1} \text{ et } z = \operatorname{coſ.}\lambda\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^{\alpha+1}$$

ſtudio euoluamus.

Euolutio formulae prioris
$$z = \text{ſin.}\, \lambda\Phi\, (\text{ſin.}\, \Phi)^{\alpha+1}.$$

§. 4. Quodſi iſtam formulam differentiemus, prodibit
$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} = \lambda \,\text{coſ.}\, \lambda\Phi\, (\text{ſin.}\,\Phi)^{\alpha+1} + (\alpha+1)\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\,(\text{ſin.}\,\Phi)^{\alpha},$$
ſiue
$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} = \text{ſin.}\,\Phi^{\alpha}\,(\lambda\,\text{coſ.}\,\lambda\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + (\alpha+1)\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi).$$
Iam in ſubſidium vocentur reductiones notiſſimae:
$$\text{ſin.}\,\lambda\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\Phi \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\lambda\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\Phi,$$
quibus valoribus ſubſtitutis reperiemus:
$$\frac{2\,\partial z}{\partial \Phi} = \text{ſin.}\,\Phi^{\alpha}\,[(\alpha+1+\lambda)\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\Phi + (\alpha+1-\lambda)\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\Phi],$$
vnde colligimus hanc integrationem:
$$2\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{\alpha+1} = (\alpha+1+\lambda)\int\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{\alpha}\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\Phi$$
$$+ (\alpha+1-\lambda)\int\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{\alpha}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\Phi),$$
vbi notetur eſſe $\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{\alpha} = n\,\partial s$.

§. 5. Ponamus nunc ſtatim $\lambda = \alpha + 1 = \frac{m}{n}$, atque integratio inuenta praebebit
$$\text{ſin.}\,\tfrac{m}{n}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{\frac{m}{n}} = m\int\partial s\,\text{ſin.}\,(\tfrac{m+n}{n})\,\Phi.$$
vnde viciſſim conficitur
$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,\tfrac{m+n}{n}\,\Phi = \tfrac{1}{m}\,\text{ſin.}\,\tfrac{m}{n}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{\frac{m}{n}}.$$
Hinc ſi fuerit $\partial y = \partial s\,\text{ſin.}\,(\frac{m+n}{n})\,\Phi$, valor ipſius y erit algebraicus.

§. 6. Sumamus nunc in noſtra integratione generali $\lambda = 1 + \frac{m+n}{n} = \frac{m+2n}{n}$, atque habebimus

2 ſin.

$$\text{ſin.}\left(\tfrac{m+2n}{n}\right)\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}} = (m+n)\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\Phi - n\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+n}{n}\right)\Phi;$$

vbi valorem integralis poſterioris iam ante definiuimus, quare integrale prius ſequenti modo exprimetur:

$$\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\Phi = \frac{1}{m+n}\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+2n}{n}\right)\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}} + \frac{n}{m(m+n)}\ \text{ſin.}\ \tfrac{m}{n}\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}},\ \text{ſiue}$$

$$\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\Phi = \frac{1}{m+n}\text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}}\left[\text{ſin.}\left(\tfrac{m+2n}{n}\right)\Phi + \tfrac{n}{m}\ \text{ſin.}\ \tfrac{m}{n}\Phi\right].$$

§. 7. Ponamus porro in forma generali $\lambda - 1 = \frac{m+3n}{n}$, ſiue $\lambda = \frac{m+4n}{n}$, ac reperiemus

$$\text{ſin.}\left(\tfrac{m+4n}{n}\right)\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}} = (m+2n)\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\Phi - 2n\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\Phi,$$

vbi cum poſterius integrale modo inuenerimus, prius ſequenti modo exprimetur:

$$\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\Phi = \frac{1}{m+2n}\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+4n}{n}\right)\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}} + \frac{2n}{m+2n}\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\Phi.$$

§. 8. Simili modo ſtatuamus nunc $\lambda - 1 = \frac{m+5n}{n}$, ſiue $\lambda = \frac{m+6n}{n}$, atque nanciſcimur ſequentem integrationem:

$$\text{ſin.}\left(\tfrac{m+6n}{n}\right)\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}} = (m+3n)\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+7n}{n}\right)\Phi - 3n\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\Phi,$$

vnde concludimus fore:

$$\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+7n}{n}\right)\Phi = \frac{1}{m+3n}\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+6n}{n}\right)\Phi\ \text{ſin.}\ \Phi^{\frac{m}{n}} + \frac{3n}{m+3n}\int\partial s\ \text{ſin.}\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\Phi.$$

§. 9. Lex, qua hae formulae continuo vlterius procedunt, ſatis eſt manifeſta, ita vt non opus ſit calculum vltra proſequi. At quo eas diſtinctius obtutui exponamus, ſit breuitatis gratia ſin. $\phi^{\frac{m}{n}} = \Phi$, et ſingulae formulae integrales hinc oriundae ita ſe habebunt:

$$\text{I. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+n}{n}\right)\phi = \tfrac{1}{m}\,\Phi \sin.\tfrac{m}{n}\phi,$$

$$\text{II. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\phi = \tfrac{1}{m+n}\,\Phi \sin.\left(\tfrac{m+2n}{n}\right)\phi + \tfrac{n}{m+n}\int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+n}{n}\right)\phi,$$

$$\text{III. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\phi = \tfrac{1}{m+2n}\,\Phi \sin.\left(\tfrac{m+4n}{n}\right)\phi + \tfrac{2n}{m+2n}\int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\phi,$$

$$\text{IV. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+7n}{n}\right)\phi = \tfrac{1}{m+3n}\,\Phi \sin.\left(\tfrac{m+6n}{n}\right)\phi + \tfrac{3n}{m+3n}\int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\phi,$$

$$\text{V. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+9n}{n}\right)\phi = \tfrac{1}{m+4n}\,\Phi \sin.\left(\tfrac{m+8n}{n}\right)\phi + \tfrac{4n}{m+4n}\int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+7n}{n}\right)\phi,$$

$$\text{VI. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+11n}{n}\right)\phi = \tfrac{1}{m+5n}\,\Phi \sin.\left(\tfrac{m+10n}{n}\right)\phi + \tfrac{5n}{m+5n}\int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+9n}{n}\right)\phi,$$

etc. etc.

§. 10. Quodſi iam in ſingulis his formulis valores integralis praecedentis ſubſtituamus, adipiſcemur ſequentes integrationes ad noſtrum vſum accommodatas:

$$\text{I. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+n}{n}\right)\phi = \tfrac{\Phi}{m} \sin.\tfrac{m}{n}\phi,$$

$$\text{II. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+3n}{n}\right)\phi = \tfrac{\Phi}{m+n}\left[\sin.\left(\tfrac{m+2n}{n}\right)\phi + \tfrac{n}{m}\sin.\tfrac{m}{n}\phi\right],$$

$$\text{III. } \int \partial s \sin.\left(\tfrac{m+5n}{n}\right)\phi = \tfrac{\Phi}{m+2n}\left[\sin.\left(\tfrac{m+4n}{n}\right)\phi + \tfrac{2n}{m+n}\sin.\tfrac{m+2n}{n}\phi + \tfrac{n.2n}{m(m+n)}\sin.\tfrac{m}{n}\phi\right],$$

IV.

IV. $$\int \partial s\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+7n}{n}\right) \phi$$
$$= \frac{\Phi}{m+3n}\Big[\text{ſin.} \left(\tfrac{m+6n}{n}\right) \phi + \frac{3n}{m+2n}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+4n}{n}\right) \phi + \frac{2n.\,3n}{(m+n)(m+2n)}\, \text{ſin.} \tfrac{(m+2n)}{n} \phi + \frac{n.\,2n.\,3n}{m(m+n)(m+2n)}\, \text{ſin.} \tfrac{m}{n} \phi\Big],$$

V. $$\int \partial s\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+9n}{n}\right) \phi$$
$$= \frac{\Phi}{m+4n}\Big[\text{ſin.} \left(\tfrac{m+8n}{n}\right) \phi + \frac{4n}{m+3n}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+6n}{n}\right) \phi + \frac{3n.\,4n}{(m+2n)(m+3n)}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+4n}{n}\right) \phi + \frac{2n.\,3n.\,4n}{(m+n)(m+2n)(m+3n)}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+2n}{n}\right) \phi + \frac{n.\,2n.\,3n.\,4n}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)}\, \text{ſin.} \tfrac{m}{n} \phi\Big].$$

VI. $$\int \partial s\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+11n}{n}\right) \phi$$
$$= \frac{\Phi}{m+5n}\Big[\text{ſin.} \left(\tfrac{m+10n}{n}\right) \phi + \frac{5n}{m+4n}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+8n}{n}\right) \phi + \frac{4n.\,5n}{(m+3n)(m+4n)}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+6n}{n}\right) \phi + \frac{3n.\,4n.\,5n}{(m+2n)(m+3n)(m+4n)} \times$$
$$\times\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+4n}{n}\right) \phi + \frac{2n.\,3n.\,4n.\,5n}{(m+n)(m+2n)(m+3n)(m+4n)}\, \text{ſin.} \left(\tfrac{m+2n}{n}\right) \phi + \frac{n.\,2n.\,3n.\,4n.\,5n}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)(m+4n)(m+5n)}\, \text{ſin.} \tfrac{m}{n}\Big].$$

etc. etc.

vbi tantum meminiſſe oportet eſſe $\Phi = \text{ſin.}\, \phi^{\frac{m}{n}}$.

§. 11. Hae formulae adhuc concinniores reddi poſſunt ponendo $\frac{m}{n} = k$, vt ſit $\Phi = \text{ſin.}\, \phi^{k}$, tum vero ſequentes orientur formulae integrales:

I. $$\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+1)\phi = \frac{\text{ſin.}\, \phi^{k}}{nk}\, \text{ſin.}\, k\phi,$$

II. $$\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+3)\phi = \frac{\text{ſin.}\, \phi^{k}}{n(k+1)}\left[\text{ſin.}\, (k+2)\phi + \tfrac{1}{k}\, \text{ſin.}\, k\phi\right],$$

III. $$\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+5)\phi$$
$$= \frac{\text{ſin.}\, \phi^{k}}{n(k+2)}\left[\text{ſin.}(k+4)\phi + \tfrac{2}{k+1}\, \text{ſin.}(k+2)\phi + \tfrac{1.\,2}{k(k+1)}\, \text{ſin.}\, k\phi\right],$$

IV. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+7)\,\Phi$

$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+3)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+6)\,\Phi + \frac{3}{k+2}\,\text{ſin.}\,(k+4)\,\Phi \\ + \frac{2.\,3}{(k+1)(k+2)}\,\text{ſin.}\,(k+2)\,\Phi + \frac{1.\,2.\,3}{k(k+1)(k+2)}\,\text{ſin.}\,k\,\Phi \end{array} \right\},$$

V. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+9)\,\Phi$

$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+4)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+8)\,\Phi + \frac{4}{k+3}\,\text{ſin.}\,(k+6)\,\Phi \\ + \frac{3.\,4}{(k+2)(k+3)}\,\text{ſin.}\,(k+4)\,\Phi + \frac{2.\,3.\,4}{(k+1)(k+2)(k+3)}\,\text{ſin.}\,(k+2)\,\Phi \\ + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\,\text{ſin.}\,k\,\Phi, \end{array} \right\},$$

VI. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+11)\,\Phi$

$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+5)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+10)\,\Phi + \frac{5}{k+4}\,\text{ſin.}\,(k+8)\,\Phi \\ + \frac{4.\,5}{(k+3)(k+4)}\,\text{ſin.}\,(k+6)\,\Phi + \frac{3.\,4.\,5}{(k+2)(k+3)(k+4)}\,\text{ſin.}\,(k+4)\,\Phi \\ + \frac{2.\,3.\,4.\,5}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\,\text{ſin.}\,(k+2)\,\Phi \\ + \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\,\text{ſin.}\,k\,\Phi. \end{array} \right\}.$$

§. 12. Hinc igitur patet, ſi i denotet numerum poſitiuum quemcunque, generatim integrale huius formae: $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+2i+1)\,\Phi$, actu exhiberi poſſe: lege enim progreſſionis probe obſeruata erit

$\int \partial s\, \text{ſin.}\, (k+2i+1)\,\Phi$

$$= \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+i)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+2i)\,\Phi + \frac{i}{k+i-1}\,\text{ſin.}\,(k+2i-2)\,\Phi \\ + \frac{(i-1)\,i}{(k+i-2)(k+i-1)}\,\text{ſin.}\,(k+2i-4)\,\Phi \\ + \frac{(i-2)(i-1)\,i}{(k+i-3)(k+i-2)(k+i-1)}\,\text{ſin.}\,(k+2i-6)\,\Phi + \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Vbi tantum obſeruetur haec integralia quandoque incongrua fieri poſſe, quod euenit, quoties in denominatoribus harum fractionum factor quiſpiam nihilo fit aequalis, ſiquidem his caſibus integrale non amplius erit algebraicum. Hoc autem con-

contingere poterit, quoties k, hoc eſt $\frac{m}{n}$, fuerit vel $=0$, vel numerus integer negatiuus, ipſi i aequalis vel minor; ſin autem iſte valor negatiuus ipſius k ſuperet i, memoratum incommodum non amplius erit metuendum.

Euolutio formulae poſterioris
$$z = \text{coſ.}\, \lambda \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{\alpha+1}.$$

§. 13. Quodſi haec formula differentietur, prodibit
$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} = \text{ſin.}\, \Phi^{\alpha} \,[(\alpha+1)\,\text{coſ.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \lambda \Phi - \lambda \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{ſin.}\, \lambda \Phi].$$
Cum nunc per notas reductiones ſit
$$\text{coſ.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \lambda \Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi \text{ et}$$
$$\text{ſin.}\, \Phi \,\text{ſin.}\, \lambda \Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi,$$
his ſubſtitutis peruenietur ad hanc formam:
$$\frac{2\partial z}{\partial \Phi} = \text{ſin.}\, \Phi^{\alpha} \,[(\alpha+1-\lambda)\,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi + (\alpha+1+\lambda)\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi],$$
vnde deducitur iſta integratio:
$$2\,\text{coſ.}\, \lambda \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{\alpha+1} = (\alpha+1-\lambda) \int \partial \Phi \,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{\alpha}$$
$$+ (\alpha+1+\lambda) \int \partial \Phi \,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{\alpha}.$$

§. 14. Quoniam igitur ſupra vidimus eſſe $\partial \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{\alpha} = n\,\partial s$, ob $\alpha+1 = \frac{m}{n} = k$, iſta integratio ad hanc formam redibit:
$$2\,\text{coſ.}\, \lambda \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{k} = n\,(k-\lambda) \int \partial s \,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi$$
$$+ n\,(k+\lambda) \int \partial s \,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi,$$
ex qua deducimus
$$\int \partial s \,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi = \frac{2}{n\,(k+\lambda)}\,\text{coſ.}\, \lambda \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^{k}$$
$$- \frac{(k-\lambda)}{k+\lambda} \int \partial s \,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\,\Phi.$$

§. 15. Ex hac forma generali iam deriuemus caſus ſpeciales, vt ſupra fecimus, ac primo quidem ſumamus $\lambda = k$, vt obtineamus iſtud quaſi principium ſequentium integrationum, ſcilicet:

$$\text{I. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+1)\Phi = \frac{\operatorname{ſin.}\Phi^k}{nk} \operatorname{coſ.} k\Phi.$$

Sumamus nunc $\lambda - 1 = k + 1$, ſiue $\lambda = k + 2$ et integratio generalis dabit

$$\text{II. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+3)\Phi$$
$$= \frac{\operatorname{ſin.}\Phi^k}{n(k+1)} \operatorname{coſ.} (k+2)\Phi + \tfrac{1}{k+1}\int \partial s \operatorname{coſ.} (k+1)\Phi.$$

Fiat nunc $\lambda - 1 = k + 3$, ſiue $\lambda = k + 4$, ac prodibit

$$\text{III. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+5)\Phi$$
$$= \frac{\operatorname{ſin.}\Phi^k}{n(k+2)} \operatorname{coſ.} (k+4)\Phi + \tfrac{2}{k+2}\int \partial s \operatorname{coſ.} (k+3)\Phi.$$

Sit iam vlterius $\lambda - 1 = k + 5$, ſiue $\lambda = k + 6$, ac prodibit

$$\text{IV. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+7)\Phi$$
$$= \frac{\operatorname{ſin.}\Phi^k}{n(k+3)} \operatorname{coſ.} (k+6)\Phi + \tfrac{3}{k+3}\int \partial s \operatorname{coſ.} (k+5)\Phi.$$

Sit porro $\lambda - 1 = k + 7$, ſiue $\lambda = k + 8$, ac fiet

$$\text{V. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+9)\Phi$$
$$= \frac{\operatorname{ſin.}\Phi^k}{n(k+4)} \operatorname{coſ.} (k+8)\Phi + \tfrac{4}{k+4}\int \partial s \operatorname{coſ.} (k+7)\Phi,$$

etc. etc.

§. 16. Quodſi iam in ſingulis formulis integralia praecedentia ſubſtituamus, nanciſcemur ſequentes integrationes:

$$\text{I. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+1)\Phi = \frac{\operatorname{ſin.}\Phi^k}{nk} \operatorname{coſ.} k\Phi,$$

II.

$$\text{II. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+3)\, \Phi = \frac{\text{ſin. } \Phi^k}{n(k+1)} \left[\operatorname{coſ.} (k+2)\, \Phi + \tfrac{1}{k} \operatorname{coſ.} k\, \Phi \right],$$

$$\text{III. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+5)\, \Phi$$

$$= \frac{\text{ſin. } \Phi^k}{n(k+2)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{coſ.} (k+4)\, \Phi + \frac{2}{k+1} \operatorname{coſ.} (k+2)\, \Phi \\ \quad + \frac{1.\,2}{k(k+1)} \operatorname{coſ.} k\, \Phi \end{array} \right\},$$

$$\text{IV. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+7)\, \Phi$$

$$= \frac{\text{ſin. } \Phi^k}{n(k+3)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{coſ.} (k+6)\, \Phi + \frac{3}{k+2} \operatorname{coſ.} (k+4)\, \Phi \\ \quad + \frac{2.\,3}{(k+1)(k+2)} \operatorname{coſ.} (k+2)\, \Phi \\ \quad + \frac{1.\,2.\,3}{k(k+1)(k+2)} \operatorname{coſ.} k\, \Phi \end{array} \right\},$$

$$\text{V. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+9)\, \Phi$$

$$= \frac{\text{ſin. } \Phi^k}{n(k+4)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{coſ.} (k+8)\, \Phi + \frac{4}{k+3} \operatorname{coſ.} (k+6)\, \Phi \\ \quad + \frac{3.\,4}{(k+2)(k+3)} \operatorname{coſ.} (k+4)\, \Phi \\ \quad + \frac{2.\,3.\,4}{(k+1)(k+2)(k+3)} \operatorname{coſ.} (k+2)\, \Phi \\ \quad + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \operatorname{coſ.} k\, \Phi \end{array} \right\},$$

$$\text{VI. } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k+11)\, \Phi$$

$$= \frac{\text{ſin. } \Phi^k}{n(k+5)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{coſ.} (k+10)\, \Phi + \frac{5}{k+4} \operatorname{coſ.} (k+8)\, \Phi \\ \quad + \frac{4.\,5}{(k+3)(k+4)} \operatorname{coſ.} (k+6)\, \Phi \\ \quad + \frac{3.\,4.\,5}{(k+2)(k+3)(k+4)} \operatorname{coſ.} (k+4)\, \Phi \\ \quad + \frac{2.\,3.\,4.\,5}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \operatorname{coſ.} (k+2)\, \Phi \\ \quad + \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \operatorname{coſ.} k\, \Phi \end{array} \right\}$$

etc. etc.

quae formulae a praecedentibus hoc tantum diſcrepant, vt ſinus angulorum hic in coſinus ſint transmutati.

 §. 17.

§. 17. Ex his igitur caſibus facile deducimus ſequentem formulam integralem:

$$\int \partial s \operatorname{coſ.} (k + 2i + 1)\Phi$$

$$= \frac{\operatorname{ſin.} \Phi^k}{n(k+i)} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{coſ.} (k+2i)\Phi + \frac{i}{(k+i-1)} \operatorname{coſ.} (k+2i-2)\Phi \\ + \frac{i(i-1)}{(k+i-2)(k+i-1)} \operatorname{coſ.} (k+2i-4).\Phi \\ + \frac{(i-2)(i-1)i}{(k+i-3)(k+i-2)(k+i-1)} \operatorname{coſ.} (k+2i-6)\Phi \end{array} \right\},$$

etc.

His igitur duabus formulis generalibus euolutis quaeſtionem propoſitam ſequenti modo facile reſoluere licebit.

Problema.

Inuenire curuas algebraicas, quarum longitudo ita exprimatur, vt eius arcus quicunque indefinitus ſit

$$s = \int \frac{v^{m-1} \partial v}{\sqrt{(1 - v^{2n})}}.$$

Solutio.

§. 18. Quaeratur primo angulus Φ, vt ſit $\operatorname{ſin.} \Phi = v^n$, ideoque $\operatorname{coſ.} \Phi = \sqrt{(1 - v^{2n})}$, tum vero, poſito breuitatis gratia $\frac{m}{n} = k$, fiet $\partial s = \frac{1}{n} \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k-1}$, quod cum ſit elementum curuae, ſi coordinatae orthogonales vocentur x et y, in genere habebimus $\partial x = \partial s \operatorname{coſ.} \omega$ et $\partial y = \partial s \operatorname{ſin.} \omega$, quandoquidem hinc prodit $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$.

§. 19. Totum negotium ergo huc redit, cuiusmodi angulos pro ω accipi oporteat, vt binae iſtae formulae differentiales euadant integrabiles, id quod oſtendimus ſemper fieri ſumendo $\omega = (k + 2i + 1)\Phi$, ita vt ſit

$$x = \int \partial s \operatorname{coſ.} (k + 2i + 1)\Phi \text{ et}$$
$$y = \int \partial s \operatorname{ſin.} (k + 2i + 1)\Phi;$$

tum

tum enim habebimus ſequentes formulas algebraicas:

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+i)} \left\{ \begin{array}{l} \text{coſ.}\,(k+2i)\Phi + \frac{i}{(k+i-1)}\,\text{coſ.}\,(k+2i-2)\Phi \\ + \frac{i(i-1)}{(k+i-1)(k+i-2)}\,\text{coſ.}\,(k+2i-4)\Phi \\ + \frac{i(i-1)(i-2)}{(k+i-1)(k+i-2)(k+i-3)}\,\text{coſ.}\,(k+2i-6)\Phi \\ + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{(k+i-1)(k+i-2)(k+i-3)(k+i-4)}\,\text{coſ.}\,(k+2i-8)\Phi \end{array} \right\},$$

etc.

et

$$y = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+i)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+2i)\Phi + \frac{i}{(k+i-1)}\,\text{ſin.}\,(k+2i-2)\Phi \\ + \frac{i(i-1)}{(k+i-1)(k+i-2)}\,\text{ſin.}\,(k+2i-4)\Phi \\ + \frac{i(i-1)(i-2)}{(k+i-1)(k+i-2)(k+i-3)}\,\text{ſin.}\,(k+2i-6)\Phi \\ + \frac{i(i-1)(i-2)(i+3)}{(k+i-1)(k+i-2)(k+i-3)(k+i-4)}\,\text{ſin.}\,(k+2i-8)\Phi \end{array} \right\},$$

etc.

vbi loco i omnes numeros integros poſitiuos, a o in infinitum vsque accipere licet; vnde ſequentes ſolutiones ſpeciales euoluiſſe iuuabit.

I. Solutio ſpecialis,

qua $i = 0$.

§. 20. Hinc igitur reſultabit ſolutio ſimpliciſſima, ambae enim coordinatae x et y ita exprimentur vt ſit

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k\,\text{coſ.}\,k\Phi}{nk} \text{ et } y = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k\,\text{ſin.}\,k\Phi}{nk},$$

quae ſolutio ſemper eſt realis, niſi fuerit $k = 0$, tum autem foret quoque $m = 0$ et $\partial s = \frac{\partial v}{v\sqrt{(1 - v^{2n})}} = \frac{1}{n}\,\frac{\partial\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi}$, vnde ſit $s = \frac{1}{n}\,l\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\Phi$, ſicque arcus per ſimplicem logarithmum exprimeretur; tales autem curuas algebraicas nullo modo exhiberi

hiberi poſſe ſatis eſt euictum. Caeterum pro omnibus reliquis caſibus, quemcunque valorem rationalem habuerit k, ſemper erit

$$x x + y y = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^{2k}}{n n k k} = \frac{v^{2nk}}{n n k k} = \frac{v^{2m}}{m m},$$

ideoque chorda $\sqrt{(x x + y y)} = \frac{v^m}{m}$.

II. Solutio ſpecialis,

qua $i = 1$.

§. 21. Hoc igitur caſu ambae coordinatae ita erunt expreſſae:

$$x = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^k}{n(k+1)} \left[\text{coſ.}\,(k+2)\Phi + \frac{1}{k}\,\text{coſ.}\, k\Phi\right] \text{ et}$$

$$y = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^k}{n(k+1)} \left[\text{ſin.}\,(k+2)\Phi + \frac{1}{k}\,\text{ſin.}\, k\Phi\right],$$

vnde conficitur chorda

$$\sqrt{(x x + y y)} = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^k}{n(k+1)} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k k} + \frac{2}{k}\,\text{coſ.}\, 2\Phi\right)} \text{ ſiue}$$

$$\sqrt{(x x + y y)} = \frac{v^m}{m(m+n)} \sqrt{[(m+n)^2 - 4 m n v^{2n}]},$$

haecque ſolutio ſemper valebit, praeter duos caſus excipiendos, qui ſunt vel $k = 0$, vel $k = -1$.

III. Solutio ſpecialis,

qua $i = 2$.

§. 22. Hoc igitur caſu ambae coordinatae erunt ita expreſſae:

$x =$

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+2)}\Big[\text{coſ.}\,(k+4)\,\Phi$$

$$+\frac{2}{k+1}\,\text{coſ.}\,(k+2)\,\Phi + \frac{2}{(k+1)}\cdot\frac{1}{k}\,\text{coſ.}\,k\,\Phi\Big] \text{ et}$$

$$y = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+2)}\Big[\text{ſin.}\,(k+4)\,\Phi$$

$$+\frac{2}{k+1}\,\text{ſin.}\,(k+2)\,\Phi + \frac{2}{(k+1)}\cdot\frac{1}{k}\,\text{ſin.}\,k\,\Phi\Big].$$

Hic igitur tres caſus excipi oportet, quibus hae formulae ceſſant eſſe algebraicae: primo ſcilicet ſi $k = 0$; 2°. ſi $k = -1$; 3°. ſi $k = -2$.

IV. Solutio ſpecialis, qua $i = 3$.

§. 23. Hoc igitur caſu ambae coordinatae ſequenti modo reperientur expreſſae:

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+3)}\Big[\text{coſ.}\,(k+6)\,\Phi + \frac{3}{k+2}\,\text{coſ.}\,(k+4)\,\Phi$$

$$+\frac{3}{k+2}\cdot\frac{2}{k+1}\,\text{coſ.}\,(k+2)\,\Phi + \frac{3}{k+2}\cdot\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{k}\,\text{coſ.}\,k\,\Phi\Big],$$

$$y = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+3)}\Big[\text{ſin.}\,(k+6)\,\Phi + \frac{3}{k+2}\,\text{ſin.}\,(k+4)\,\Phi$$

$$+\frac{3}{k+2}\cdot\frac{2}{k+1}\,\text{ſin.}\,(k+2)\,\Phi + \frac{3}{k+2}\cdot\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{k}\,\text{ſin.}\,k\,\Phi\Big].$$

Hae ergo formulae quatuor caſibus erunt inutiles: 1°. $k = 0$; 2°. $k = -1$; 3°. $k = -2$; 4°. $k = -3$, quippe quibus termini in infinitum excreſcentes abirent in arcus circulares, neque igitur formulae amplius eſſent algebraicae.

V. Solutio ſpecialis,

qua $i = 4$.

§. 24. Hoc igitur caſu coordinatae ſequenti modo exprimentur:

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+4)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+8)\Phi + \frac{4}{k+3}\,\text{ſin.}\,(k+6)\Phi \\ + \frac{4}{k+3} \cdot \frac{3}{k+2} \cdot \text{coſ.}\,(k+4)\Phi \\ + \frac{4}{k+3} \cdot \frac{3}{k+2} \cdot \frac{2}{k+1}\,\text{coſ.}\,(k+2)\Phi \\ + \frac{4}{k+3} \cdot \frac{3}{k+2} \cdot \frac{2}{k+1} \cdot \frac{1}{k}\,\text{coſ.}\,k\Phi \end{array} \right\},$$

$$y = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^k}{n(k+4)} \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin.}\,(k+8)\Phi + \frac{4}{k+3}\,\text{ſin.}\,(k+6)\Phi \\ + \frac{4}{k+3} \cdot \frac{3}{k+2}\,\text{ſin.}\,(k+4)\Phi \\ + \frac{4}{k+3} \cdot \frac{3}{k+2} \cdot \frac{2}{k+1} \cdot \text{ſin.}\,(k+2)\Phi \\ + \frac{4}{k+3} \cdot \frac{3}{k+2} \cdot \frac{2}{k+1} \cdot \text{ſin.}\,k\Phi \end{array} \right\},$$

vbi manifeſtum eſt has formulas, praeter quatuor caſus ante notatos, inſuper caſu $k = -4$ fieri inutiles.

Corollarium.

§. 25. Exceptis igitur caſibus quibus k aequatur numero integro negatiuo, methodus noſtra ſemper ſuppeditat innumerabiles curuas algebraicas; neque tamen idcirco haec ſolutio pro generali eſt habenda, cum etiam caſibus memoratis, quibus numerus ſolutionum noſtrarum limitatur, nihilominus infinitas ſolutiones aliis methodis aſſignare liceat; vbi quidem ſemper excludi oportet caſum $k = 0$, quippe quo certum eſt nullas curuas algebraicas ſatisfacere poſſe. Innumerabilitatem ſolutionum, pro caſu $k = -1$, oſtendiſſe operae erit pretium.

Euo-

Euolutio caſus
quo $k = -1$.

§. 26. Hoc igitur caſu noſtra methodus vnicam praebet curuam algebraicam, his coordinatis contentam: $x = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\cos. \Phi}{\sin. \Phi}$ et $y = \frac{1}{n}$, quae ergo eſt linea recta axi parallela. Cum autem ſit $\partial s = \frac{\partial \Phi}{n \sin. \Phi}$, erit $s = -\frac{1}{n} \cot. \Phi$; ſicque omnes plane curuae algebraicae rectificabiles hoc caſu ſatisfaciunt. Sumta enim quacunque tali curua, cuius arcus s per formulam algebraicam exprimatur, ſemper aſſignari poterit angulus Φ, vt fiat $-\frac{1}{n} \cot. \Phi = s$; vnde patet praeter lineam rectam quam inuenimus, omnes plane curuas rectificabiles ſatisfacere.

Corollarium.

§. 27. Cum igitur formula noſtra differentialis $\partial s = \frac{v^{m-1} \partial v}{\sqrt{(1 - v^{2n})}}$, ſemper abſolute euadat integrabilis, quoties k, ſiue $\frac{m}{n}$, fuerit vel numerus integer poſitiuus par, vel etiam numerus integer negatiuus impar; manifeſtum eſt his omnibus caſibus omnes plane curuas algebraicas rectificabiles perinde eſſe ſatisfacturas, ideoque reuera his caſibus infinities plures curvae algebraicae noſtro problemati ſatisfacient, quam noſtra methodus nobis ſuppeditauit. Verum etiam, dummodo k ſit numerus negatiuus integer, ſemper innumerabiles curuas algebraicas aſſignare licet, quod pro caſu $k = -2$ oſtendiſſe ſufficiet.

Euolutio caſus
quo $k = -2$.

§. 28. Hoc igitur caſu methodus ſuperior duas tantum nobis largitur curuas algebraicas, ſcilicet:

 1°.)

1°. $x = -\frac{coſ.\,2\,\Phi}{2\,n\,ſin.\,\Phi^2}$ et $y = \frac{ſin.\,2\,\Phi}{2\,n\,ſin.\,\Phi^2}$,

2°. $x = -\frac{1}{n\,ſin.\,\Phi^2}(1 - \frac{1}{2}\,coſ.\,2\,\Phi)$ et $y = -\frac{ſin.\,2\,\Phi}{2\,n\,ſin.\,\Phi}$.

Cum autem hoc caſu ſit $\partial s = \frac{\partial\,\Phi}{n\,ſin.\,\Phi^3}$, ſtatuatur cot. $\Phi = t$, eritque $\frac{\partial\,\Phi}{ſin.\,\Phi^2} = -\partial\,t$, ideoque $\partial s = -\frac{\partial\,t}{n\,ſin.\,\Phi}$, quia vero eſt ſin. $\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$, fiet $\partial s = -\frac{1}{n}\partial\,t\sqrt{(1+tt)}$, quod cum ſit elementum arcus parabolici, nuper iam demonſtraui infinitas curuas algebraicas ſatisfacere, atque hoc idem quoque tenendum eſt, ſi littera k cuicunque numero impari negatiuo maiori aequetur.

Scholion.

§. 29. Ex his iam facile colligere licet, etiam in genere pro omnibus valoribus ipſius k reuera infinities plures curvas algebraicas eſſe ſatisfacturas, quam methodus noſtra nobis ſuppeditat, etiamſi adeo innumerabiles exhibeat. Interim tamen duos caſus excipi neceſſe eſt: alterum quo $k = 0$, pro quo iam notauimus, nullas plane curuas algebraicas ſatisfacere; alterum vero quo $k = 1$; cum enim ſit $\partial s = \frac{1}{n}\partial\Phi$, arcus s ipſe arcui circulari aequari deberet, cui conditioni ſolus circulus ſatisfacere eſt monſtratus, id quod etiam noſtrae ſolutiones manifeſto declarabunt.

Euolutio caſus quo $k = 1$.

§. 30. Pro hoc ergo caſu ſolutio ſpecialis prima praebet has coordinatas:

$$x = \tfrac{1}{n}\,ſin.\,\Phi\,coſ.\,\Phi \text{ et } y = \tfrac{1}{n}\,ſin.\,\Phi^2.$$

Cum igitur ſit

$$x = \tfrac{1}{2n}\,ſin.\,2\,\Phi \text{ et } y = \tfrac{1}{2n}(1 - coſ.\,2\,\Phi) \text{ erit,}$$

$$\tfrac{1}{2n}\,coſ.\,2\,\Phi = \tfrac{1}{2n} - y,$$

additis

additis ergo quadratis erit

$$xx + (\tfrac{1}{2n} - y) = \tfrac{1}{4nn},$$

quae aequatio manifeſto eſt pro circulo.

§. 31. Secunda vero ſolutio ſpecialis pro hoc caſu nobis dat

$$x = \tfrac{\text{ſin.}\,\Phi}{2n}(\text{coſ.}\,3\,\Phi + \text{coſ.}\,\Phi) \text{ et}$$

$$y = \tfrac{\text{ſin.}\,\Phi}{2n}(\text{ſin.}\,3\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi),$$

quae formulae per reductiones notas abeunt in has:

$$4nx = \text{ſin.}\,4\,\Phi \text{ et } 4ny = 1 - \text{coſ.}\,4\,\Phi,$$

ideoque $\text{coſ.}\,4\,\Phi = 1 - 4ny$. Additis igitur quadratis orietur $16nnxx + (1 - 4ny)^2 = 1$, quae itidem eſt pro circulo.

§. 32. Simili modo ſolutio ſpecialis tertia praebet

$$x = \tfrac{\text{ſin.}\,\Phi}{3n}(\text{coſ.}\,5\,\Phi + \text{coſ.}\,3\,\Phi + \text{coſ.}\,\Phi) \text{ et}$$

$$y = \tfrac{\text{ſin.}\,\Phi}{3n}(\text{ſin.}\,5\,\Phi + \text{ſin.}\,3\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi),$$

quae pariter more ſolito reductae dant $6nx = \text{ſin.}\,6\,\Phi$ et $6ny = 1 - \text{coſ.}\,6\,\Phi$, vnde ſi angulum $6\,\Phi$ eliminemus, manifeſto reſultat aequatio ad circulum.

§. 33. Quin etiam hoc idem in genere oſtendere licet, quandoquidem ſumto $k = 1$ reperitur

$$x = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{n(i+1)}\left\{\begin{array}{l}\text{coſ.}\,(2i+1)\,\Phi + \text{coſ.}\,(2i-1)\,\Phi \\ + \text{coſ.}\,(2i-2)\,\Phi + \text{coſ.}\,(2i-3)\,\Phi \\ + \text{etc.} \;.\;.\;.\;.\;.\; + \text{coſ.}\,\Phi\end{array}\right\},$$

$$y = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{n(i+1)}\left\{\begin{array}{l}\text{ſin.}\,(2i+1)\,\Phi + \text{ſin.}\,(2i-1)\,\Phi \\ + \text{ſin.}\,(2i-2)\,\Phi + \text{ſin.}\,(2i-3)\,\Phi \\ + \text{etc.} \;.\;.\;.\;.\;.\; + \text{ſin.}\,\Phi.\end{array}\right\}.$$

Reductionibus igitur adhibitis colligetur fore

$$2n(i+1)x = \text{ſin.}(2i+2)\Phi \text{ et}$$
$$2n(i+1)y = 1 - \text{coſ.}(2i+2)\Phi,$$

vnde patet curuam ſatisfacientem perpetuo manere circulum.

Scholion.

§. 34. Euidens autem eſt, reliquis caſibus omnibus ſolutiones methodo noſtra datas maxime a ſe inuicem eſſe diſcrepaturas, atque adeo continuo ad altiores curuarum ordines eſſe aſcenſuras. Interim tamen, etiamſi ſolutio noſtra infinitas praebeat curuas ſatisfacientes, nullum plane eſt dubium, quin praeter eas innumerabiles aliae reuera aſſignari queant, quemadmodum pro caſibus, quibus curuae debent eſſe rectificabiles, iam ſatis eſt oſtenſum. Eandem ſolutionum multiplicitatem inſuper alio caſu, quo $k = 3$, declaraſſe iuuabit.

Euolutio caſus quo $k = 3$.

§. 35. Hoc quidem caſu noſtra methodus infinitas exhibet curuas algebraicas; verum praeter illas ſequenti modo innumerabiles alias inuenire licebit. Cum enim ſit $\partial s = \frac{1}{n}\partial\Phi\,\text{ſin.}\Phi^2$, erit $\partial s = \frac{\partial\Phi}{2n}(1 - \text{coſ.}\,2\Phi)$, quae formula nobis ſequentes valores pro ∂x et ∂y aſſumendos ſuggerit:

$$\partial x = \frac{\partial\Phi}{2n}(1 - \text{coſ.}\,2\Phi)\,\text{coſ.}\,\lambda\Phi \text{ et}$$
$$\partial y = \frac{\partial\Phi}{2n}(1 - \text{coſ.}\,2\Phi)\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi,$$

quae formulae manifeſto ſemper integrationem admittent, ſolo caſu $\lambda = \pm 2$ excepto. Quodſi enim reductiones notae in ſubſidium vocentur, proueniet

$$\frac{4n\,\partial x}{\partial\Phi} = 2\,\text{coſ.}\,\lambda\Phi - \text{coſ.}(\lambda+2)\Phi - \text{coſ.}(\lambda-2)\Phi \text{ et}$$
$$\frac{4n\,\partial y}{\partial\Phi} = 2\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi - \text{ſin.}(\lambda+2)\Phi - \text{ſin.}(\lambda-2)\Phi,$$

quae

quae ergo formulae integratae nobis praebent

$$4nx = \frac{2\, ſin.\, \lambda \Phi}{\lambda} - \frac{ſin.\, (\lambda + 2) \Phi}{\lambda + 2} - \frac{ſin.\, (\lambda - 2) \Phi}{\lambda - 2} \text{ et}$$

$$4ny = -\frac{2\, coſ.\, \lambda \Phi}{\lambda} + \frac{coſ.\, (\lambda + 2) \Phi}{\lambda + 2} + \frac{coſ.\, (\lambda - 2) \Phi}{\lambda - 2}.$$

§. 36. Quoniam hic pro λ non ſolum omnes numeros integros, verum etiam omnes fractiones aſſumere licet, euidens eſt iſtam ſolutionem infinities latius patere, quam ſupra exhibitam. Quin etiam manifeſtum eſt iſtas nouas ſolutiones omnes a ſuperioribus penitus eſſe diuerſas.

§. 37. Eodem modo caſus tractari poterunt, quibus litterae k valor integer poſitiuus quicunque tribuitur, propterea quod poteſtatem ſin. Φ^k ſemper in ſinus vel coſinus ſimplices reſoluere licet, quae partes deinde tam in ſinus $\lambda \Phi$ quam in coſ. $\lambda \Phi$ ductae euadent integrabiles, dummodo $\lambda \Phi$ non tale ſit multiplum ipſius Φ, cuiusmodi ex illa reſolutione ſunt natae.

§. 38. Quoniam haec maximae ſunt generalia atque ob hanc ipſam cauſam maiori illuſtratione indigeant, referamus formulas ſupra inuentas ad caſum quempiam ſpecialem et in curuas algebraicas inquiramus, quarum arcus ſiue per arcum curuae elaſticae $\int \frac{\partial v}{\sqrt{(1 - v^4)}}$, ſiue per applicatam eiusdem curuae, $\int \frac{v v \partial v}{\sqrt{(1 - v^4)}}$, exprimatur.

Exemplum I.

§. 39. *Inuenire curuas algebraicas, quarum arcus ſit* $s = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - v^4)}}$.

Cum igitur hic ſit $m = 1$, et $n = 2$, erit $k = \frac{1}{2}$, vnde ſolutionum ſpecialium ſupra datarum prima nobis praebebit $x = $ coſ. $\frac{1}{2} \Phi \sqrt{}$ ſin. Φ et $y = $ ſin. $\frac{1}{2} \Phi \sqrt{}$ ſin. Φ. Quo nunc hinc angulum Φ eliminemus, quaeramus $x x + y y = $ ſin. Φ et $2 x y = $ ſin. Φ ſin. $\frac{1}{2} \Phi$ coſ. $\frac{1}{2} \Phi = $ ſin. Φ^2, eritque

$2xy = (xx + yy)^2$, quae ergo curua eſt ordinis quarti et ſub nomine Lemniſcatae cognita, cuius adeo omnes arcus pari modo, quo circulares, intèr ſe comparari poſſe iam dudum a Geometris eſt oſtenſum.

§. 40. Simili modo ſequentes ſolutiones ſpeciales perducent ad alias curuas algebraicas eiusdem indolis, quae autem ad multo altiores ordines aſſurgent, quas hic idcirco fuſius euoluere ſuperfluum foret.

Exemplum 2.

§. 41. *Inuenire formulam algebraicam, cuius arcus ſit* $s = \int \frac{vv\partial v}{\sqrt{(1-v^4)}}$.

Hic igitur eſt $m = 3$ et $n = 2$, ideoque $k = \frac{3}{2}$, vnde ſpecies prima praebet

$$x = \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\Phi^{\frac{3}{2}}\,\text{coſ.}\,\tfrac{3}{2}\Phi \text{ et } y = \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\Phi^{\frac{3}{2}}\,\text{ſin.}\,\tfrac{3}{2}\Phi,$$

vnde erit

$$9(xx + yy = \text{ſin.}\,\Phi^3 \text{ et}$$

$$18\,xy = 2\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{ſin.}\,\tfrac{3}{2}\Phi\,\text{coſ.}\,\tfrac{3}{2}\Phi = \text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{ſin.}\,3\Phi.$$

Cum igitur ſit $\text{ſin.}\,3\Phi = 3\,\text{ſin.}\,\Phi - 4\,\text{ſin.}\,\Phi^3$, erit

$$18\,xy = 3\,\text{ſin.}\,\Phi^4 - 4\,\text{ſin.}\,\Phi^6,$$

hinc porro

$$3\,\text{ſin.}\,\Phi^4 = 18\,xy + 324\,(xx + yy)^2, \text{ ſiue}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi^4 = 6\,xy + 108\,(xx + yy)^2.$$

Hinc igitur deducimus binos valores pro $\text{ſin.}\,\Phi^{12}$, vnde naſcitur ſequens aequatio:

$$216\,[xy + 18\,(xx + yy)^2]^3 = 9^4\,(xx + yy)^4,$$

quae aequatio aſſurgit ad ordinem duodecimum, videturque eſſe ſimpliciſſima, quae huic conditioni ſatisfaciat.

Scho-

Scholion.

§. 42. Principia autem, quae hic ſtabiliuimus, quaeſtionibus multo magis complicatis reſoluendis ſufficiunt, quemadmodum in ſequenti problemate adhuc ſumus oſtenſuri.

Problema magis generale.

Inuenire curuas algebraicas, quarum arcus indefiniti s *ita exprimantur, vt ſit*

$$s = \int \frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}(a + b v^{2n} + c v^{4n} + d v^{6n} + \text{etc.})$$

Solutio.

§. 43. Quotcunque terminos iſta expreſſio contineat, ſufficiet ſolutionem ad tres terminos accommodaſſe, quandoquidem hinc facile perſpicietur, quomodo calculum ad quotcunque terminos extendi oporteat. Statuamus igitur vt ante $v^n = \text{ſin.}\,\Phi$, ac poſito $\frac{m}{n} = k$, quia inde fit

$$\frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}} = \tfrac{1}{n}\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{k-1},$$

pro noſtro problemate habebimus:

$$\partial s = \tfrac{1}{n}\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{k-1}(a + b\,\text{ſin.}\,\Phi^2 + c\,\text{ſin.}\,\Phi^4).$$

§. 44. Cum nunc hic habeamus tres partes, in quibus exponentes ipſius ſin. Φ ſunt $k-1$; $k+1$; $k+3$; qui binario aſcendunt, ponamus pro parte ſecunda $k+2 = k'$, ac pro tertia $k+4 = k''$, vt ternae noſtrae partes fiant

$$\partial s = \tfrac{a\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\Phi^{k-1} + \tfrac{b\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\Phi^{k'-1} + \tfrac{c\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\Phi^{k''-1}.$$

Has igitur ſingulatim multiplicemus per coſinum et ſinum eiusdem anguli $(k+2i+1)\Phi$, qui pro parte ſecunda erit

$(k' + 2i - 1)\Phi$, pro tertia autem $(k'' + 2i - 3)\Phi$; vbi tantum notari oportet numerum integrum i ita accipi debere, vt vltimus numerus $2i - 3$ maneat poſitiuus.

§. 45. His igitur conſtitutis ex formula ∂s prorſus vt ſupra determinare licebit elementa coordinatarum ∂x et ∂y, ponendo ſcilicet

$$\partial x = \partial s \operatorname{coſ.} (k + 2i + 1)\Phi \text{ et}$$
$$\partial y = \partial s \operatorname{ſin.} (k + 2i + 1)\Phi,$$

quandoquidem hinc fiet $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$, vnde ternis partibus pro ∂s ſcribendis ipſae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{n} \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k-1} \operatorname{coſ.} (k + 2i + 1)\Phi \\ + \frac{b}{n} \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k'-1} \operatorname{coſ.} (k' + 2i - 1)\Phi \\ + \frac{c}{n} \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k''-1} \operatorname{coſ.} (k'' + 2i - 3)\Phi \end{array} \right\},$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{n} \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k-1} \operatorname{ſin.} (k + 2i + 1)\Phi \\ + \frac{b}{n} \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k'-1} \operatorname{ſin.} (k' + 2i - 1)\Phi \\ + \frac{c}{n} \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{k''-1} \operatorname{ſin.} (k'' + 2i - 3)\Phi \end{array} \right\}.$$

Vbi integralia ſingularum partium per formulas ſupra §. 13 et §. 18. exhibitas aſſignare licet, ſiquidem ibi dedimus integralia harum formularum:

$$\int \partial s \operatorname{ſin.} (k + 2i + 1)\Phi \text{ et } \int \partial s \operatorname{coſ.} (k + 2i + 1)\Phi,$$

exiſtente $\partial s = \frac{\partial \Phi}{n} \operatorname{ſin.} \Phi^{k-1}$.

§. 46. Cum igitur hic loco i innumerabiles numeros integros aſſumere liceat, manifeſtum eſt etiam pro hoc problemate infinitas exhiberi poſſe ſolutiones, ſi modo excipiantur caſus illi ſingulares, quibus quispiam denominator euaneſcit, id quod euenit, quando k vel cyphrae, vel numero nega-

tiuo

tiuo integro aequatur. Caeterum hoc problema exemplo particulari illuſtraſſe iuuabit.

Exemplum.

§. 47. *Inuenire curuas algebraicas, pro quibus ſit*
$s = \int \frac{\partial v}{\sqrt{(1 - vv)}} (a + b v^2 + c v^4)$.

Hic ergo erit $m = 1$; $n = 1$ et $k = 1$, ideoque $k' = 3$ et $k'' = 5$, quamobrem ambae coordinatae in genere ita exprimentur:

$$x = \left\{ \begin{array}{l} a \int \partial \Phi \operatorname{coſ.} (2i + 2) \Phi \\ + b \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2 \operatorname{coſ.} (2i + 2) \Phi \\ + c \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^4 \operatorname{coſ.} (2i + 2) \Phi \end{array} \right\},$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} a \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} (2i + 2) \Phi, \\ + b \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2 \operatorname{ſin.} (2i + 2) \Phi \\ + c \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^4 \operatorname{ſin.} 2i + 2) \Phi, \end{array} \right\}.$$

Vbi autem notandum eſt numerum i vnitate maiorem capi debere, ne $2i - 3$ fiat negatiuum.

§. 48. Quo igitur curuam ſimpliciſſimam ſatisfacientem nanciſcamur, ſumamus $i = 2$, atque formulae integrales pro coordinatis erunt:

$$\begin{array}{l} x = a \int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 6 \Phi \\ \quad + b \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2 \operatorname{coſ.} 6 \Phi \\ \quad + c \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^4 \operatorname{coſ.} 6 \Phi \text{ et} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y = a \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} 6 \Phi \\ \quad + b \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2 \operatorname{ſin.} 6 \Phi \\ \quad + c \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^4 \operatorname{ſin.} 6 \Phi. \end{array}$$

Iam pro primis partibus eſt $k = 1$ et $\partial s = \partial \Phi$, vnde erit

$$\int \partial s \operatorname{cof.} 6\Phi = \int \partial s \operatorname{cof.} (k+5)\Phi$$
$$= \tfrac{\operatorname{ſin.}\Phi}{3} (\operatorname{cof.} 5\Phi + \operatorname{cof.} 3\Phi + \operatorname{cof.}\Phi) \text{ et}$$
$$\int \partial s \operatorname{ſin.} 6\Phi = \int \partial s \operatorname{ſin.} (k+5)\Phi$$
$$= \tfrac{\operatorname{ſin.}\Phi}{3} (\operatorname{ſin.} 5\Phi + \operatorname{ſin.} 3\Phi + \operatorname{ſin.}\Phi),$$

qui valores reducti dabunt:

$$\int \partial s \operatorname{cof.} 6\Phi = \tfrac{1}{6} \operatorname{ſin.} 6\Phi \text{ et}$$
$$\int \partial s \operatorname{ſin.} 6\Phi = \tfrac{1}{6}(1 - \operatorname{cof.} 6\Phi),$$

quas formulas per quantitatem a multiplicari oportet.

§. 49. Pro partibus ſecundis habemus $\partial s = \partial\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^2$ et $k = 3$, vnde nanciſcimur:

$$\int \partial\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^2 \operatorname{cof.} 6\Phi = \int \partial s \operatorname{cof.} (k+3)\Phi$$
$$= \tfrac{\operatorname{ſin.}\Phi^3}{4} (\operatorname{cof.} 5\Phi + \tfrac{1}{3} \operatorname{cof.} 3\Phi) \text{ et}$$
$$\int \partial\Phi \operatorname{ſin.}\Phi^2 \operatorname{ſin.} 6\Phi = \int \partial s \operatorname{ſin.} (k+3)\Phi$$
$$= \tfrac{\operatorname{ſin.}\Phi^3}{4} (\operatorname{ſin.} 5\Phi + \tfrac{1}{3} \operatorname{ſin.} 3\Phi).$$

Prior forma ob $\operatorname{ſin.}\Phi^3 = \tfrac{3}{4}\operatorname{ſin.}\Phi - \tfrac{1}{4}\operatorname{ſin.} 3\Phi$, tranſit in hanc:

$$\int \partial s \operatorname{cof.} 6\Phi = \tfrac{1}{16}[3 \operatorname{ſin.}\Phi \operatorname{cof.} 5\Phi - \operatorname{ſin.} 3\Phi \operatorname{cof.} 5\Phi$$
$$+ \operatorname{ſin.}\Phi \operatorname{cof.} 3\Phi - \tfrac{1}{3} \operatorname{ſin.} 3\Phi \operatorname{cof.} 3\Phi],$$

ideoque

$$\int \partial s \operatorname{cof.} 6\Phi = \tfrac{1}{32}(-2 \operatorname{ſin.} 4\Phi + \tfrac{8}{3} \operatorname{ſin.} 6\Phi - 1 \operatorname{ſin.} 8\Phi)$$
$$= -\tfrac{1}{16} \operatorname{ſin.} 4\Phi + \tfrac{1}{12} \operatorname{ſin.} 6\Phi - \tfrac{1}{32} \operatorname{ſin.} 8\Phi.$$

Simili modo habebimus

$$\int \partial s \operatorname{ſin.} 6\Phi = \tfrac{1}{16}[3 \operatorname{ſin.}\Phi \operatorname{ſin.} 5\Phi - \operatorname{ſin.} 3\Phi \operatorname{ſin.} 5\Phi$$
$$+ \operatorname{ſin.}\Phi \operatorname{ſin.} 3\Phi - \tfrac{1}{3} \operatorname{ſin.} 3\Phi^2],$$

ideoque

$$\int \partial s \operatorname{ſin.} 6\Phi = \tfrac{1}{32}(2 \operatorname{cof.} 4\Phi - \tfrac{8}{3} \operatorname{cof.} 6\Phi + \operatorname{cof.} 8\Phi)$$
$$= +\tfrac{1}{16} \operatorname{ſin.} 4\Phi - \tfrac{1}{12} \operatorname{ſin.} 6\Phi + \tfrac{1}{32} \operatorname{ſin.} 8\Phi).$$

§. 50.

§. 50. Verum in hoc negotio formulis ſupra datis penitus carere poſſumus; cum enim ſit $\sin.\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.2\Phi$, erit primo pro partibus ſecundis littera *b* affectis:

$$\int \partial\Phi \sin.\Phi^2 \cos.6\Phi = \tfrac{1}{2}\int \partial\Phi \cos.6\Phi\,(1 - \cos.2\Phi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\int \partial\Phi\,(\cos.6\Phi - \tfrac{1}{2}\cos.8\Phi - \tfrac{1}{2}\cos.4\Phi),$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$= \tfrac{1}{12}\sin.6\Phi - \tfrac{1}{32}\sin.8\Phi - \tfrac{1}{16}\sin.4\Phi.$$

Deinde ob

$$\sin.\Phi^2 \sin.6\Phi = \tfrac{1}{2}\sin.6\Phi - \tfrac{1}{2}\cos.2\Phi \sin.6\Phi$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin.6\Phi - \tfrac{1}{4}\sin.8\Phi - \tfrac{1}{4}\sin.4\Phi$$

habebimus

$$\int \partial s \sin.6\Phi = -\tfrac{1}{12}\cos.6\Phi + \tfrac{1}{32}\cos.8\Phi + \tfrac{1}{16}\cos.4\Phi,$$

quas formulas per litteram *b* multiplicari oportet.

§. 51. Denique pro tertiis partibus littera *c* affectis cum ſit

$$\sin.\Phi^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos.2\Phi + \tfrac{1}{8}\cos.4\Phi,$$

erit

$$\sin.\Phi^4 \cos.6\Phi = \tfrac{3}{8}\cos.6\Phi - \tfrac{1}{4}\cos.8\Phi - \tfrac{1}{4}\cos.4\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{16}\cos.10\Phi + \tfrac{1}{16}\cos.2\Phi;$$

vnde integrando nanciſcimur:

$$\int \partial\Phi \sin.\Phi^4 \cos.6\Phi = \tfrac{1}{16}\sin.6\Phi - \tfrac{1}{32}\sin.8\Phi$$
$$- \tfrac{1}{16}\sin.4\Phi + \tfrac{1}{160}\sin.10\Phi + \tfrac{1}{32}\sin.2\Phi.$$

Deinde vero erit

$$\int \partial\Phi \sin.\Phi^4 \sin.6\Phi = \tfrac{3}{8}\sin.6\Phi - \tfrac{1}{4}\sin.8\Phi - \tfrac{1}{4}\sin.4\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{16}\sin.10\Phi + \tfrac{1}{16}\sin.2\Phi,$$

ideoque integrando habebimus:

$$\int \partial\Phi \sin.\Phi^4 \sin.6\Phi = -\tfrac{1}{16}\cos.6\Phi + \tfrac{1}{32}\cos.8\Phi$$
$$+ \tfrac{1}{16}\cos.4\Phi - \tfrac{1}{160}\cos.10\Phi - \tfrac{1}{32}\cos.2\Phi.$$

§. 52. His igitur colligendis ambae coordinatae x et y ſequenti modo expreſſae reperiuntur:

$$x = \frac{c}{32} \text{ſin.}\, 2\,\Phi - \frac{(b+c)}{16} \text{ſin.}\, 4\,\Phi + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{12} + \frac{c}{18}\right) \text{ſin.}\, 6\,\Phi$$
$$- \frac{(b+c)}{32} \text{ſin.}\, 8\,\Phi + \frac{c}{160} \text{ſin.}\, 10\,\Phi,$$
$$y = -\frac{c}{32} \text{coſ.}\, 2\,\Phi + \frac{(b+c)}{16} \text{coſ.}\, 4\,\Phi - \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{12} + \frac{c}{18}\right) \text{coſ.}\, 6\,\Phi$$
$$+ \frac{b+c}{32} \text{coſ.}\, 8\,\Phi - \frac{c}{160} \text{coſ.}\, 10\,\Phi,$$

vbi conſtantem $\frac{a}{b}$ in prima parte pro y ingreſſam omiſimus.

DE

DE DVABVS PLVRIBVSVE CVRVIS ALGEBRAICIS, IN QVIBVS, SI A TERMINIS FIXIS AEQVALES ARCVS ABSCINDANTVR, EORVM AMPLITVDINES DATAM INTER SE TENEANT RATIONEM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 19 *Aug.* 1776.

§. 1.

Vnamquamque earum linearum curuarum, de quibus hic agitur, veluti curuam A Y, ita ad ſuum axem A Z referri concipiamus, vt ipſi in A normaliter inſiſtat, exiſtente puncto A eo termino fixo, a quo arcus A Y abſcindantur. Tab. I. Fig. 1. Hinc poſito arcu $AY = s$, ductaque ad arcum in Y normali Y Z, angulus A Z Y metietur amplitudinem arcus A Y, quam vocemus $= \omega$; tum vero ſi ex Y ad axem ducatur normalis Y X, vocenturque coordinatae $AX = x$ et $XY = y$, primo quidem erit $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$; deinde quia angulus $AYX = AZY = \omega$, manifeſtum eſt fore $\partial x = \partial s$ ſin. ω et $\partial y = \partial s$ coſ. ω. Quamobrem cum de curuis algebraicis hic agatur, eiusmodi relationem inter elementum arcus ∂s et ampli-

amplitudinem ω conſtitui neceſſe eſt, vt ambae iſtae formulae differentiales: $\partial x = \partial s \sin.\omega$ et $\partial y = \partial s \operatorname{cos}.\omega$ reddantur integrabiles.

§. 2. Huic autem conditioni ſatisfiet, ſi ſtatuatur $\partial s = v\partial\omega + \frac{\partial\partial v}{\partial\omega}$, denotante v functionem quamcunque algebraicam altitudinis, vbi ſcilicet ratione differentialium altiorum elementum $\partial\omega$ conſtans eſt acceptum. Hinc igitur ambas coordinatas x et y algebraice exprimere licebit; cum enim ſit

$$\partial x = v\partial\omega \sin.\omega + \frac{\partial\partial v \sin.\omega}{\partial\omega} \text{ et}$$

$$\partial y = v\partial\omega \operatorname{cos}.\omega + \frac{\partial\partial v \operatorname{cos}.\omega}{\partial\omega},$$

per notam integralium reductionem facile reperietur fore

$$x = \frac{\partial v}{\partial\omega}\sin.\omega - v\operatorname{cos}.\omega \text{ et}$$

$$y = \frac{\partial v}{\partial\omega}\operatorname{cos}.\omega - v\sin.\omega,$$

id quod ſumendis differentialibus ſtatim patebit. Quare cum ambo hi valores pro x et y algebraicae exprimantur, ipſa curva vtique erit algebraica, quaecunque etiam functio algebraica amplitudinis ω loco v accipiatur. Cum porro ſit $\partial s = v\partial\omega + \frac{\partial\partial v}{\partial\omega}$, erit integrando ipſa curuae longitudo $AY = s = \int v\partial\omega + \frac{\partial v}{\partial\omega}$; ex quo patet curuam adeo fore rectificabilem, ſi modo formula $\int v\partial\omega$ integrationem admittat; ſin autem haec formula non fuerit integrabilis, curuae rectificatio a certa quadam pendebit quadratura arbitrio noſtro relicta.

§. 3. Manifeſtum hic eſt, plures huiusmodi formulas pro elemento ∂s aſſumendas inuicem coniungi poſſe. Veluti ſi ſtatuamus:

$$\partial s = v\partial\omega + \frac{\partial\partial v}{\partial\omega} + u\partial\omega + \frac{\partial\partial u}{\partial\omega} + w\partial\omega + \frac{\partial\partial w}{\partial\omega},$$

exiſtentibus v, u et w functionibus quibuscunque algebraicis ipſius ω, ſimili modo patebit fore

$x =$

$$x = \frac{\partial v}{\partial \omega} \text{ſin.}\, \omega - v \text{ coſ.}\, \omega + \frac{\partial u}{\partial \omega} \text{ſin.}\, \omega - u \text{ coſ.}\, \omega$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial \omega} \text{ſin.}\, \omega - w \text{ coſ.}\, \omega \text{ et}$$
$$y = \frac{\partial v}{\partial \omega} \text{coſ.}\, \omega + v \text{ ſin.}\, \omega + \frac{\partial u}{\partial \omega} \text{coſ.}\, \omega + u \text{ ſin.}\, \omega$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial \omega} \text{coſ.}\, \omega + w \text{ ſin.}\, \omega,$$

tota res ſcilicet hic perinde ſe habet, ac ſi loco v ſcripſiſſemus $v + u + w$. In ſequentibus autem loco u et w eiusmodi formulas a v pendentes aſſumi conueniet, vt ſit $u = \frac{A \partial \partial v}{\partial \omega^2}$ et $w = \frac{B \partial^4 v}{\partial \omega^4}$, eritque,

$$\partial s = v \partial \omega + \frac{\partial \partial v}{\partial \omega} + \frac{A \partial \partial v}{\partial \omega} + \frac{A \partial^4 v}{\partial \omega^3} + \frac{B \partial^4 v}{\partial \omega^3} + \frac{B \partial^6 v}{\partial \omega^5},$$

indeque porro

$$x = \frac{\partial v}{\partial \omega} \text{ſin.}\, \omega - v \text{ coſ.}\, \omega + \frac{A \partial^3 v}{\partial \omega^3} \text{ſin.}\, \omega - \frac{A \partial \partial v}{\partial \omega^2} \text{coſ.}\, \omega$$
$$+ \frac{B \partial^5 v}{\partial \omega^5} \text{ſin.}\, \omega - \frac{B \partial^4 v}{\partial \omega^4} \text{coſ.}\, \omega,$$
$$y = \frac{\partial v}{\partial \omega} \text{coſ.}\, \omega + v \text{ ſin.}\, \omega + \frac{A \partial^3 v}{\partial \omega^3} \text{coſ.}\, \omega + \frac{A \partial \partial v}{\partial \omega^2} \text{ſin.}\, \omega$$
$$+ \frac{B \partial^5 v}{\partial \omega^5} \text{coſ.}\, \omega + \frac{B \partial^4 v}{\partial \omega^4} \text{ſin.}\, \omega.$$

§. 4. His praemiſſis conſideremus inſuper aliam curvam B Y′, pariter in B ſuo axi B Z′ normaliter inſiſtentem, in qua abſcindatur arcus B Y′, illi arcui A Y $= s$ aequalis, cui reſpondeant coordinatae B X′ $= x'$, X′ Y′ $= y'$. Nunc autem conſideremus conditionem praeſcriptam, vt ſcilicet amplitudines horum duorum arcuum aequalium datam inter ſe teneant rationem, quae ſit vt $\alpha : \beta$. Hunc igitur in finem ſtatuamus amplitudinem prioris curuae A Z Y $= \alpha \Phi$, poſterioris vero B Z′ Y′ $= \beta \Phi$, ita vt quod ante fuerat ω, nunc pro priore curua ſit $\alpha \Phi$, pro poſteriore vero $\beta \Phi$. Quare quo vtraque curua prodeat algebraica, eiusmodi formulam pro vtriusque elemento ∂s inueſtigari oportebit, quae non ſolum per ſin. $\alpha \Phi$ et coſ. $\alpha \Phi$, ſed etiam per ſin. $\beta \Phi$ et coſ. $\beta \Phi$ multipli- Tab. I. Fig. 1 & 2.

 cata

cata euadat integrabilis, ita vt quatuor multiplicatores hic praeſcribantur, id quod ſolutionem maxime perplexam requireret; verum eo modo, quo hic ſumus vſuri, negotium haud difficulter conficietur.

§. 5. Quoniam formula $v \partial \omega + \frac{\partial \partial v}{\partial \omega}$, ducta tam in ſin. ω quam in coſ. ω fit integrabilis, ſi loco ω ſcribamus $\alpha \Phi$, prodibit formula tam per ſin. $\alpha \Phi$, quam per coſ. $\alpha \Phi$ multiplicata integrabilis, quae ergo erit $\alpha v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\alpha \partial \Phi}$, ſiue per α diuidendo, $v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi}$. Haec autem formula ducta in ſin. $\alpha \Phi$ dabit integrale $\frac{\partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi}$ ſin. $\alpha \Phi - \frac{v}{\alpha}$ coſ. $\alpha \Phi$; at vero per coſ. $\alpha \Phi$ multiplicata integrale dabit $\frac{\partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi}$ coſ. $\alpha \Phi + \frac{v}{\alpha}$ ſin. $\alpha \Phi$. Simili modo haec formula: $v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\beta \beta \partial \Phi}$, euadet integrabilis, primo ducta in ſin. $\beta \Phi$, deinde etiam in coſ. $\beta \Phi$; priore enim caſu integrale erit $\frac{\partial v}{\beta \beta \partial \Phi}$ ſin. $\beta \Phi - \frac{v}{\beta}$ coſ. $\beta \Phi$, poſteriore vero caſu integrale erit $\frac{\partial v}{\beta \beta \partial \Phi}$ coſ. $\beta \Phi + \frac{v}{\beta}$ ſin. $\beta \Phi$.

§. 6. Iam ad quaeſtionem propoſitam reſoluendam, qua duae requiruntur curuae algebraicae A Y et B Y′, in quibus ſi a terminis fixis A et B bini arcus aequales $AY = s$ et $BY' = s$ abſcindantur, eorum amplitudines, ſeu anguli $AZY = \alpha \Phi$ et $BZ'Y' = \beta \Phi$, datam inter ſe teneant rationem, ſcilicet vt $\alpha : \beta$, accipiamus pro priore curua hanc formulam:

$$\partial s = v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi} + A \left(\frac{\partial \partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial^4 v}{\alpha \alpha \partial \Phi^3} \right),$$

hinc enim fiet

$$x = \int \partial s \text{ ſin. } \alpha \Phi = \frac{\partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi} \text{ ſin. } \alpha \Phi - \frac{1}{\alpha} v \text{ coſ. } \alpha \Phi$$
$$+ \frac{A \partial^3 v}{\alpha \alpha \partial \Phi^3} \text{ ſin. } \alpha \Phi - \frac{A \partial \partial v \text{ coſ. } \alpha \Phi}{\alpha \partial \Phi^2},$$

$y =$

$$y = \int \partial s \operatorname{cof.} \alpha \Phi = \frac{\partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi} \operatorname{cof.} \alpha \Phi + \frac{v \operatorname{fin.} \alpha \Phi}{\alpha}$$
$$+ \frac{A \partial^3 v}{\alpha \alpha \partial \Phi^3} \operatorname{cof.} \alpha \Phi + \frac{A \partial \partial v}{\alpha \partial \Phi^2} \operatorname{fin.} \alpha \Phi.$$

Simili modo ſi pro altera curua aſſumamus:

$$\partial s = v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\beta \beta \partial \Phi} + B \left(\frac{\partial \partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial^4 v}{\beta \beta \partial \Phi^3} \right),$$

eiusque coordinatas ſtatuamus $BX' = x'$ et $X'Y' = y'$, reperiemus:

$$x' = \int \partial s \operatorname{fin.} \beta \Phi = \frac{\partial v}{\beta \beta \partial \Phi} \operatorname{fin.} \beta \Phi - \frac{v \operatorname{cof.} \beta \Phi}{\beta}$$
$$+ \frac{B \partial^3 v}{\beta \beta \partial \Phi^3} \operatorname{fin.} \beta \Phi - \frac{B \partial \partial v}{\beta \partial \Phi^2} \operatorname{cof.} \beta \Phi \text{ et}$$
$$y' = \int \partial s \operatorname{cof.} \beta \Phi = \frac{\partial v}{\beta \beta \partial \Phi} \operatorname{cof.} \beta \Phi + \frac{v \operatorname{fin.} \beta \Phi}{\beta}$$
$$+ \frac{B \partial^3 v}{\beta \beta \partial \Phi^3} \operatorname{cof.} \beta \Phi + \frac{B \partial \partial v}{\beta \partial \Phi^2} \operatorname{fin.} \beta \Phi.$$

§. 7. Nunc igitur quoniam ambo arcus AY et BY′ inter ſe debent eſſe aequales, quantitates conſtantes A et B ita definiri oportet, vt ambae formulae pro ∂s aſſumtae inter ſe fiant aequales. At quia primae partes, littera v affectae, iam vtrinque ſunt eaedem, reddantur ſecundae partes per $\partial \partial v$ affectae etiam inter ſe aequales, vnde fiet $\frac{1}{\alpha \alpha} + A = \frac{1}{\beta \beta} + B$; vltimae autem partes per $\partial^4 v$ affectae reddentur aequales, ſumendo $\frac{A}{\alpha \alpha} = \frac{B}{\beta \beta}$, vnde fit $B = \frac{A \beta \beta}{\alpha \alpha}$, qui valor in praecedente aequatione ſubſtitutus dat $\frac{1}{\alpha \alpha} + A = \frac{1}{\beta \beta} + \frac{A \beta \beta}{\alpha \alpha}$, vnde colligitur $A = \frac{1}{\beta \beta}$, ergo $B = \frac{1}{\alpha \alpha}$, ita vt pro vtraque curua ſit

$$\partial s = v \partial \Phi + \frac{\partial \partial v}{\alpha \alpha \partial \Phi} + \frac{\partial \partial v}{\beta \beta \partial \Phi} + \frac{\partial^4 v}{\alpha \alpha \beta \beta \partial \Phi^3}.$$

Tum autem coordinatae prioris curuae AY erunt

$$x = -\frac{v \operatorname{cof.} \alpha \Phi}{\alpha} + \frac{\partial v \operatorname{fin.} \alpha \Phi}{\alpha \alpha \partial \Phi} - \frac{\partial \partial v \operatorname{cof.} \alpha \Phi}{\alpha \beta \beta \partial \Phi^2} + \frac{\partial^3 v \operatorname{fin.} \alpha \Phi}{\alpha \alpha \beta \beta \partial \Phi^3} \text{ et}$$
$$y = \frac{v \operatorname{fin.} \alpha \Phi}{\alpha} + \frac{\partial v \operatorname{cof.} \alpha \Phi}{\alpha \alpha \partial \Phi} + \frac{\partial \partial v \operatorname{fin.} \alpha \Phi}{\alpha \beta \beta \partial \Phi^2} + \frac{\partial^3 v \operatorname{cof.} \alpha \Phi}{\alpha \alpha \beta \beta \partial \Phi^3};$$

pro altera autem curua BY′ habebimus:

 $x' =$

$$x' = -\frac{v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi} - \frac{\partial\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\alpha\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^3} \text{ et}$$

$$y' = \frac{v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi} + \frac{\partial\partial v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta\alpha\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^3}.$$

Operae igitur pretium erit iſtum caſum ſingulari problemate complecti.

Problema.

§. 8. *Inuenire duas curuas algebraicas A Υ et B Υ′, in quibus ſi a datis terminis A et B bini arcus aequales A Υ et B Υ′ abſcindantur, eorum amplitudines ſeu anguli A Z Υ et B Z′ Υ′ datam inter ſe teneant rationem, vt α : β.*

Solutio.

Statuantur amplitudines A Z Y $= \alpha\Phi$ et B Z′ Y′ $= \beta\Phi$, vt eorum ratio ſit $\alpha : \beta$, tum autem pro elemento vtriusque curuae ∂s eiusmodi formulam accipi oportet, quae in quaternos valores ſin. $\alpha\Phi$, coſ. $\alpha\Phi$; ſin. $\beta\Phi$, coſ. $\beta\Phi$, ducta euadat integrabilis, id quod eueniet, vti vidimus, ſi ſtatuatur

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta}\right)\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta}\cdot\frac{\partial^4 . v}{\partial\Phi^3},$$

vbi loco v functionem quamcunque algebraicam anguli Φ aſſumere licet; tum enim ſi pro priore curua A Y elementum ∂s ita ordinetur, vt ſit

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \frac{\partial\partial v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} + \frac{1}{\beta\beta}\left(\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} + \frac{\partial^4 v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3}\right),$$

euidens eſt huius curuae coordinatas fore

$$\text{AX} = x = -\frac{v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha} + \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} - \frac{\partial\partial v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^3}$$

$$\text{AY} = y = \frac{v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} + \frac{\partial\partial v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^3}.$$

Pro altera autem curua expreſſio elementi ∂s ita ordinetur, vt ſit

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \frac{\partial\partial v}{\beta\beta\,\partial\Phi} + \frac{1}{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} + \frac{\partial^4 v}{\beta\beta\,\partial\Phi^3}\right),$$

vnde coordinatae alterius curuae B Y′ deducuntur:

B X′

$$BX' = x' = -\frac{v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta} + \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi} - \frac{\partial\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\alpha\alpha\,\partial\Phi^2} - \frac{\partial^3 v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^3} \text{ et}$$

$$BX' = y' = \frac{v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi} + \frac{\partial\partial v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta\alpha\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta\,\partial\Phi^3}.$$

§. 9. Ex his formulis euidens eſt, ſi ratio amplitudinum $\alpha:\beta$ debeat eſſe aequalitatis, ſiue $\beta = \alpha$, tum ambas curuas inter ſe penitus fore easdem. Eatenus igitur hae duae curuae a ſe inuicem diſcrepabunt, quatenus numeri α et β erunt inaequales. Facile autem intelligitur, has ambas curuas pro algebraicis haberi non poſſe, niſi ratio $\alpha:\beta$ fuerit rationalis. Caeterum formula, quam hic pro ∂s inuenimus, omni attentione ideo eſt digna, quod per quadruplices multiplicatores redditur integrabilis. Totam autem hanc ſolutionem exemplo illuſtraſſe iuuabit.

Exemplum.

Quo ſtatuitur $v = \text{coſ.}\,\Phi$.

§. 10. Cum igitur hinc ſit $\int v\,\partial\Phi = \text{ſin.}\,\Phi$, ambae noſtrae curuae ſimul erunt rectificabiles; deinde ergo erit differentiando $\frac{\partial v}{\partial\Phi} = -\text{ſin.}\,\Phi$; $\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi^2} = -\text{coſ.}\,\Phi$; $\frac{\partial^3 v}{\partial\Phi^3} = \text{ſin.}\,\Phi$; et $\frac{\partial^4 v}{\partial\Phi^4} = \text{coſ.}\,\Phi$; ex his conficitur vterque arcus

$$AY = BY' = s = \text{ſin.}\,\Phi - \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta}\right)\text{ſin.}\,\Phi + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta}\,\text{ſin.}\,\Phi, \text{ ſiue}$$

$$s = \text{ſin.}\,\Phi\left(1 - \frac{1}{\alpha\alpha} - \frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta}\right) = \text{ſin.}\,\Phi\left(1 - \frac{1}{\alpha\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta\beta}\right),$$

vnde patet, ſi eſſet $\alpha = 1$, vel $\beta = 1$, tum iſtos arcus perpetuo fore $= 0$. Quoniam autem non tam ipſi numeri α et β, quam eorum ratio $\alpha:\beta$ praeſcribitur, nihil impedit, quo minus numeri α et β quantumuis magni accipiantur, ita vt ipſa horum numerorum magnitudo arbitrio noſtro relinquatur.

§. 11. Hinc igitur patet longitudinem vtriusque arcus perpetuo ſinui anguli Φ eſſe proportionalem, deinde vero pro

priore curua AY coordinatae ita erunt determinatae:

$$AX = x = -\frac{coſ.\Phi\, coſ.\alpha\Phi}{\alpha} - \frac{ſin.\Phi\, ſin.\alpha\Phi}{\alpha\alpha}$$

$$+\frac{coſ.\Phi\, coſ.\alpha\Phi}{\alpha\beta\beta} + \frac{ſin.\Phi\, ſin.\alpha\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta}, \text{ ſiue}$$

$$x = -\frac{1}{\alpha\alpha}\left(1-\frac{1}{\beta\beta}\right)(\alpha\, coſ.\Phi\, coſ.\alpha\Phi + ſin.\Phi\, ſin.\alpha\Phi);$$

$$XY = y = \frac{coſ.\Phi\, ſin.\alpha\Phi}{\alpha} - \frac{ſin.\Phi\, coſ.\alpha\Phi}{\alpha\alpha}$$

$$-\frac{coſ.\Phi\, ſin.\alpha\Phi}{\alpha\beta\beta} + \frac{ſin.\Phi\, coſ.\alpha\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta}, \text{ ſiue}$$

$$y = \frac{1}{\alpha\alpha}\left(1-\frac{1}{\beta\beta}\right)(\alpha\, coſ.\Phi\, ſin.\alpha\Phi - ſin.\Phi\, coſ.\alpha\Phi).$$

Pro altera autem curua coordinatae erunt:

$$BX' = x' = -\frac{coſ.\Phi\, coſ.\beta\Phi}{\beta} - \frac{ſin.\Phi\, coſ.\beta\Phi}{\beta\beta}$$

$$+\frac{coſ.\Phi\, coſ.\beta\Phi}{\beta\alpha\alpha} + \frac{ſin.\Phi\, ſin.\beta\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta}, \text{ ſiue}$$

$$x' = -\frac{1}{\beta\beta}\left(1-\frac{1}{\alpha\alpha}\right)(\beta\, coſ.\Phi\, coſ.\beta\Phi + ſin.\Phi\, ſin.\beta\Phi);$$

$$X'Y' - y' = \frac{coſ.\Phi\, ſin.\beta\Phi}{\beta} - \frac{ſin.\Phi\, coſ.\beta\Phi}{\beta\beta}$$

$$-\frac{coſ.\Phi\, ſin.\beta\Phi}{\beta\alpha\alpha} + \frac{ſin.\Phi\, coſ.\beta\Phi}{\alpha\alpha\beta\beta}, \text{ ſiue}$$

$$y' = \frac{1}{\beta\beta}\left(1-\frac{1}{\alpha\alpha}\right)(\beta\, coſ.\Phi\, ſin.\beta\Phi - ſin.\Phi\, coſ.\beta\Phi).$$

His autem valoribus eiusmodi conſtantes adiungi oportet, vt euaneſcant facto $\Phi = 0$.

§. 12. Quo haec clarius appareant, ſtabiliatur ratio illa $\alpha:\beta$ vt $1:2$, ſumaturque $\alpha = 2$ et $\beta = 4$, hincque vterque arcus erit $s = \frac{15}{4}\, ſin.\Phi$, tum vero coordinatae pro priore curua colliguntur:

$$x = \tfrac{15}{32} - \tfrac{15}{64}(2\, coſ.\Phi\, coſ.\, 2\Phi + ſin.\Phi\, ſin.\, 2\Phi) \text{ et}$$

$$y = \tfrac{15}{64}(2\, coſ.\Phi\, ſin.\, 2\Phi - ſin.\Phi\, coſ.\, 2\Phi),$$

pro altera autem curua erit

$$x' = \tfrac{3}{16} - \tfrac{3}{64}(4\, coſ.\Phi\, coſ.\, 4\Phi + ſin.\Phi\, ſin.\, 4\Phi) \text{ et}$$

$$y' = \tfrac{3}{64}(4\, coſ.\Phi\, ſin.\, 4\Phi - ſin.\Phi\, coſ.\, 4\Phi).$$

Hae

Hae autem expreſſiones ad ſimplices ſinus et coſinus reduci poſſunt; erit enim pro priore curua:

$$x = \frac{15}{32} - \frac{45}{128}\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{15}{128}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi \text{ et}$$

$$y = \frac{15}{128}\,\text{ſin.}\,3\,\Phi + \frac{45}{128}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

pro altera autem curua ſimpliciter habebimus:

$$x' = \frac{3}{16} - \frac{15}{128}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi - \frac{9}{128}\,\text{coſ.}\,5\,\Phi \text{ et}$$

$$y' = + \frac{9}{128}\,\text{ſin.}\,3\,\Phi + \frac{15}{128}\,\text{ſin.}\,5\,\Phi.$$

Vnde patet curuam poſteriorem ad altiorem ordinem aſſurgere quam priorem. Caeterum haud difficulter perſpicietur, omnes has curuas ex poſitione: $v = \text{coſ.}\,\Phi$ oriundas, eſſe Epicycloides.

Problema generalius.

§. 13. *Inuenire tres curuas algebraicas $A\Upsilon$, $B\Upsilon'$ et $C\Upsilon''$, in quibus ſi a punctis fixis A, B, C arcus aequales $A\Upsilon$, $B\Upsilon'$ et $C\Upsilon''$ abſcindantur, eorum amplitudines, ſeu anguli $AZ\Upsilon$, $BZ'\Upsilon'$ $CZ''\Upsilon''$, datam inter ſe teneant rationem, vt $\alpha : \beta : \gamma$.* Tab. I. Fig. 1 2. 3.

Solutio.

Ponantur iſtae amplitudines, ſeu anguli $AZY = \alpha\Phi$; $BZ'Y' = \beta\Phi$ et $CZ''Y'' = \gamma\Phi$; ac pro elemento cuiusque curuae ∂s eiusmodi formula requiritur, quae tam per ſinus quam coſinus ſingularum amplitudinum multiplicata euadat integrabilis; huiusmodi autem formula, vti mox patebit, eſt haec:

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma}\right)\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi}$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha^2\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2\gamma^2}\right)\frac{\partial^4 v}{\partial\Phi^3} + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}\,\frac{\partial^6 v}{\partial\Phi^5},$$

vbi pro v functionem quamcunque algebraicam anguli Φ accipere licet, id quod ita eſt intelligendum, vt v ſit functio quaecunque algebraica ſiue ſinus, ſiue coſinus, ſiue tangentis anguli

anguli Φ. Haec enim expreſſio pro ∂s aſſumta ita eſt comparata, vt ſi multiplicetur per ſingulos ſex hos factores: 1°. $\text{ſin.}\,\alpha\Phi$; 2°. $\text{coſ.}\,\alpha\Phi$; 3°. $\text{ſin.}\,\beta\Phi$; 4°. $\text{coſ.}\,\beta\Phi$; 5°. $\text{ſin.}\,\gamma\Phi$ et 6°. $\text{coſ.}\,\gamma\Phi$, euadat integrabilis, quemadmodum ex ſequentibus perſpicietur.

§. 14. Pro prima curua A Y, cuius amplitudo eſt $= \alpha\Phi$, elementum curuae ita repraeſentetur:

$$\partial s = v\,\partial\Phi + \frac{\partial\partial v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} + \left(\frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma}\right)\left(\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} + \frac{\partial^4 v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3}\right) + \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial\Phi^3} + \frac{\partial^6 v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^5}\right),$$

quae expreſſio manifeſto ab ante propoſita non diſcrepat. Haec autem terna membra integrabilia euadunt, ſiue ducantur in $\text{ſin.}\,\alpha\Phi$ ſiue in $\text{coſ.}\,\alpha\Phi$, vnde colligentur coordinatae huius curuae, ſcilicet:

$$\begin{aligned} A X = x = &- \frac{v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha} + \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} \\ &+ \left(\frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma}\right)\left(- \frac{\partial\partial v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3}\right) \\ &+ \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma}\left(- \frac{\partial^4 v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^5}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X Y = y = &\frac{v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} \\ &+ \left(\frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma}\right)\left(\frac{\partial\partial v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3}\right) \\ &+ \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{\partial^4 v\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^5}\right). \end{aligned}$$

§. 15. Pro ſecunda curua B Y′ operatio ſimili modo inſtitui poterit; verum quia litterae α, β, γ inter ſe permutari poſſunt, per analogiam eius coordinatae ex praecedentibus facillime formantur, ſiquidem erit

$$\begin{aligned} B Y' = x' = &- \frac{v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta} + \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi} \\ &+ \left(\frac{1}{\gamma\gamma} + \frac{1}{\alpha\alpha}\right)\left(- \frac{\partial\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi^3}\right. \\ &+ \frac{1}{\gamma\gamma\alpha\alpha}\left(- \frac{\partial^4 v\,\text{coſ.}\,\beta\Phi}{\beta\,\partial\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,\text{ſin.}\,\beta\Phi}{\beta\beta\,\partial\Phi^5}\right) \text{ et} \end{aligned}$$

X′ Y′ =

$$X'Y' = y' = \frac{v\,\text{ſin.}\,\beta\,\Phi}{\beta} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\beta\,\Phi}{\beta\beta\,\partial\,\Phi}$$
$$+ \left(\frac{1}{\gamma\gamma} + \frac{1}{\alpha\alpha}\right)\left(\frac{\partial\,\partial\,v\,\text{ſin.}\,\beta\,\Phi}{\beta\,\partial\,\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{coſ.}\,\beta\,\Phi}{\beta\beta\,\partial\,\Phi^3}\right)$$
$$+ \frac{1}{\gamma\gamma\alpha\alpha}\left(\frac{\partial^4 v\,\text{ſin.}\,\beta\,\Phi}{\beta\,\partial\,\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,\text{coſ.}\,\beta\,\Phi}{\beta\beta\,\partial\,\Phi^5}\right).$$

§. 16. Eodem modo pro tertia curua C Y″ coordinatae ſequenti modo exprimentur:

$$C\,Y'' = x'' = -\frac{v\,\text{coſ.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma} + \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\gamma\,\partial\,\Phi}$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta}\right)\left(-\frac{\partial\,\partial\,v\,\text{coſ.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\,\partial\,\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{ſin.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\gamma\,\partial\,\Phi^3}\right)$$
$$+ \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta}\left(-\frac{\partial^4 v\,\text{coſ.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\,\partial\,\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,\text{ſin.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\gamma\,\partial\,\Phi^5}\right)$$

$$X''Y'' = y'' = \frac{v\,\text{ſin.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma} + \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\gamma\,\partial\,\Phi}$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta}\right)\left(\frac{\partial\,\partial\,v\,\text{ſin.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\,\partial\,\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,\text{coſ.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\gamma\,\partial\,\Phi^3}\right)$$
$$+ \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta}\left(\frac{\partial^4 v\,\text{ſin.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\,\partial\,\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,\text{coſ.}\,\gamma\,\Phi}{\gamma\gamma\,\partial\,\Phi^5}\right).$$

§. 17. Quoniam in his tribus curuis arcus abſciſſi A Y, B Y′, C Y″, ſunt inter ſe aequales, eorum longitudo communis per integrationem colligitur fore

$$s = \int v\,\partial\,\Phi + \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma}\right)\frac{\partial v}{\partial\,\Phi}$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta} + \frac{1}{\alpha\alpha\gamma\gamma} + \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma}\right)\frac{\partial^3 v}{\partial\,\Phi^3} + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}\,\frac{\partial^5 v}{\partial\,\Phi^5}.$$

Vnde patet, ſi modo prima formula $\int v\,\partial\,\Phi$ integrationem admittat, tum has curuas ſimul fore rectificabiles; contra autem functionem v facile ita aſſumere licebit, vt rectificatio harum curuarum a data quadratura pendeat.

§. 18. Hae ergo tres curuae etiam ita ſunt comparatae, vt ſi in una earum A Y a termino fixo A arcus quicunque A Y $= s$ abſcindatur, in binis reliquis a terminis itidem fixis B et C arcus B Y′ et C Y″ illi aequales facile abſcindi queant. Quaeratur enim primo amplitudo arcus abſciſſi A Y, quae ſit $= \omega$, ac ponatur $\omega = \alpha\,\Phi$, vt ſit $\Phi = \frac{\omega}{\alpha}$; tum in

ſecunda curua quaeratur arcus BY', cuius amplitudo ſit $= \beta \Phi = \frac{\beta \omega}{\alpha}$, id quod praeſtabitur, quaerendo punctum Y', vbi tangens ad axem inclinetur ſub angulo $= 90 - \beta \Phi$, quo facto arcus B Y' aequalis erit arcui A Y; ſimilique modo in tertia curua arcus C Y'' reperietur.

Problema.

Tab. I. Fig. 1..4. *Inuenire quatuor curuas algebraicas A Y, B Y', C Y'' et D Y''', ſuis axibus in punctis A, B, C, D normaliter inſiſtentes, in quibus ſi ab his terminis arcus aequales A Y, B Y', C Y'', D Y''' abſcindantur, eorum amplitudines eandem inter ſe teneant rationem, quam habent quatuor numeri* α, β, γ *et* δ.

Solutio.

§. 19. Poſitis his quatuor amplitudinibus $AZY = \alpha \Phi$; $BZ'Y' = \beta \Phi$; $CZ''Y'' = \gamma \Phi$ et $DZ'''Y''' = \delta \Phi$, totum negotium eo redit, vt eiusmodi formula differentialis pro elemento curuae ∂s inueſtigetur, quae tam per ſinus quam coſinus horum quatuor angulorum multiplicata euadat integrabilis, cui conditioni ſatisfacere facile perſpicietur haec formula:

$$\partial s = \begin{cases} v \partial \Phi + \left(\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma} + \frac{1}{\delta\delta} \right) \\ + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta} + \frac{1}{\alpha\alpha\gamma\gamma} + \frac{1}{\alpha\alpha\theta\theta} + \frac{1}{\beta\beta\theta\theta} + \frac{1}{\gamma\gamma\theta\theta} \Big) \frac{\partial^4 v}{\partial \Phi^3} \\ + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma} + \frac{2}{\alpha\alpha\beta\beta\theta\theta} + \frac{1}{\alpha\alpha\gamma\gamma\theta\theta} + \frac{\beta\beta\gamma\gamma\theta\theta}{\beta\beta\gamma\gamma\theta\theta} \Big) \frac{\partial^6 v}{\partial \Phi^5} \\ + \frac{1}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\theta\theta} \frac{\partial^8 v}{\partial \Phi^7}. \end{cases}$$

§. 20. Quodſi enim hinc coordinatas primae curuae AY elicere velimus, elementum curuae ∂s ſequenti modo per membra repraeſentetur:

$\partial s =$

$$\partial s = (v\,\partial\Phi + \frac{\partial\partial v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi}) + (\frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma} + \frac{1}{\delta\delta})(\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} + \frac{\partial^4 v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3})$$
$$+ (\frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma} + \frac{1}{\beta\beta\delta\delta} + \frac{1}{\gamma\gamma\delta\delta})(\frac{\partial^4 v}{\partial\Phi^3} + \frac{\partial^6 v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^5})$$
$$+ \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}(\frac{\partial^6 v}{\partial\Phi^5} + \frac{\partial^8 v}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^7}),$$

haec enim forma primo in ſin. $\alpha\Phi$, deinde in coſ. $\alpha\Phi$, ducta et integrata dabit ambas coordinatas primae curuae, ſcilicet:

$$AX = x = -\frac{v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha} + \frac{\partial v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} + (\frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma} + \frac{1}{\delta\delta}) \times$$
$$\times (-\frac{\partial\partial v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3})$$
$$+ (\frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma} + \frac{1}{\beta\beta\delta\delta} + \frac{1}{\gamma\gamma\delta\delta})(-\frac{\partial^4 v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^5})$$
$$+ \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}(-\frac{\partial^6 v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^6} + \frac{\partial^7 v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^7}) \text{ et}$$

$$XY = y = \frac{v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha} + \frac{\partial v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi} + (\frac{1}{\beta\beta} + \frac{1}{\gamma\gamma} + \frac{1}{\delta\delta}) \times$$
$$\times (\frac{\partial\partial v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^2} + \frac{\partial^3 v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^3})$$
$$+ (\frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma} + \frac{1}{\beta\beta\delta\delta} + \frac{1}{\gamma\gamma\delta\delta})(\frac{\partial^4 v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^4} + \frac{\partial^5 v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^5})$$
$$+ \frac{1}{\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}(\frac{\partial^6 v\,ſin.\,\alpha\Phi}{\alpha\,\partial\Phi^6} + \frac{\partial^7 v\,coſ.\,\alpha\Phi}{\alpha\alpha\,\partial\Phi^7}).$$

Eodem modo expreſſiones pro coordinatis reliquarum curuarum per ſolam analogiam formabuntur, dum quatuor litterae α, β, γ, δ, ordine promouentur, ita vt ſuperfluum foret iſtas formulas ſatis prolixas hic euoluere. Caeterum cum functio v penitus arbitrio noſtro relinquatur, dummodo fuerit algebraica, facile intelligitur, hanc ſolutionem maxime eſſe generalem, id quod eo magis eſt mirandum, quod ſine vlla difficultate ad plures quotcunque curuas, tali indole inter ſe connexas, accommodari poſſit, dum alioquin inuentio huiusmodi formularum differentialium, quae per plures factores multiplicatae euadunt integrabiles, maximis difficultatibus obuoluta deprehenditur.

§. 21. Quantuscunque enim fuerit numerus huiusmodi curuarum inueniendarum, quarum amplitudines ſeſe habere

debeant in ratione numerorum α, β, γ, δ, ε, ζ, etc. tum primo conſiderentur fractiones $\frac{1}{\alpha\alpha}$; $\frac{1}{\beta\beta}$; $\frac{1}{\gamma\gamma}$; $\frac{1}{\delta\delta}$; $\frac{1}{\varepsilon\varepsilon}$; etc. quarum ſumma ponatur $= A$, tum vero ſumma productorum ex binis ſtatuatur $= B$, ſumma productorum ex ternis $= C$, ex quaternis $= D$, etc. donec perueniatur ad productum ex omnibus, quibus conſtitutis, ſi elementum curuae ∂s hac formula referatur:

$$\partial s = v\,\partial\Phi + A\,\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} + B\,\frac{\partial^4 v}{\partial\Phi^3} + C\,\frac{\partial^6 v}{\partial\Phi^5} + D\,\frac{\partial^8 v}{\partial\Phi^7}, \text{ etc.}$$

ea hac inſigni praedita erit proprietate, vt ſiue multiplicetur per ſinus ſingulorum angulorum $\alpha\Phi$, $\beta\Phi$, $\gamma\Phi$, $\delta\Phi$, etc. ſiue per eorum coſinus, ea ſemper integrationem admittat, vnde huic Analyſeos generi, parum adhuc exculto, haud contemnendum incrementum allatum eſt cenſendum.

DE

DE METHODO TANGENTIVM INVERSA AD THEORIAM SOLIDORVM TRANSLATA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 2 *Sept.* 1776.

§. 1.

Quemadmodum methodus tangentium inuerſa verſatur in inveſtigatione eiusmodi linearum curuarum, quae certis proprietatibus, ratione tangentium, ſiue normalium, ſiue aliarum linearum, per rationem differentialium determinatarum, ſint praeditae: ita hoc loco ſimilem methodum ad theoriam ſolidorum ſum accommodaturus, ita vt eiusmodi ſuperficies inueſtigari debeant, quibus certae ac praeſcriptae proprietates, ratione tangentium, vel normalium aliarumque quantitatum, per differentialium rationem definitarum, conueniant.

§. 2. Quemadmodum porro methodus tangentium inverſa communis ita ad Analyſin puram reuocari poteſt, vt relatio inter binas quantitates variabiles x et y inueſtigetur, ex data quacunque relatione inter earum differentialia, ſiue primi, ſiue altioris cuiuſpiam ordinis; vel etiam quaeratur, qualis func-

ctio ipſius x eſſe debeat quantitas y, vt certa quaedam relatio inter differentialia praeſcripta locum ſit habitura: ita ſimili modo eiusmodi quaeſtiones proponi poſſunt, in quibus quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et y eſſe debeat quantitas z, vt certa quaedam proprietas propoſita, per differentialia expreſſa, obtineatur.

§. 3. Cum igitur huiusmodi quaeſtiones circa functiones duarum variabilium verſentur, totum hoc argumentum ad eam Analyſeos partem eſt referendum, in qua functiones duarum pluriumue variabilium tractari ſolent, cuius ratio, quemadmodum iam ſaepius obſeruaui, toto coelo eſt diuerſa ab Analyſi communi, in qua tantum functiones vnius variabilis tractantur, atque adeo prorſus peculiare calculi genus poſtulat, cuius etiamnunc prima principia vix a Geometris ſunt explorata; vnde plurimum ad incrementum ſcientiae Analyticae conferet eiusmodi quaeſtiones euoluere, quarum ſolutio iſtam nouam Analyſeos partem requirat. Hunc igitur in finem ſequentem quaeſtionem accuratius pertractare conſtitui.

Problema.

Super dato plano eiusmodi ſolidum exſtruere, ad cuius ſuperficiem ſi in ſingulis punctis normales ducantur, eae omnes inter ſe futurae ſint aequales.

Tab. II. Fig. 1. §. 4. Perſpicuum eſt hanc quaeſtionem analogam eſſe illi, qua in plano ſuper axe dato eiusmodi curua requiritur, cuius omnes normales inter ſe ſint aequales, ſiue vt poſita abſciſſa $AX = x$ et applicata $XY = y$, normalis YN, quae eſt $\frac{y\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial x}$, habeat quantitatem conſtantem $= a$. Hinc ergo, poſito $\partial y = p\,\partial x$, requiritur vt ſit $y\sqrt{(1 + pp)} = a$, vnde ſequitur fore $p = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$, vnde porro habebitur

tur $\partial x = \frac{y \partial y}{\sqrt{(aa - yy)}}$, cuius integrale praebet $x = C - \sqrt{(aa - yy)}$, quae eſt aequatio ad circulum, cuius radius $= a$, ita vt omnes normales in idem punctum N, quod eſt centrum, conuergere debeant; quae ſolutio, quamquam per integrationem eſt inuenta, tamen non omnino eſt generalis, quandoquidem ipſi aequationi differentiali $\partial x \sqrt{(aa - yy)} = y \partial y$, etiam ſatisfacit valor $y = a$, quae aequatio eſt ad lineam rectam axi ad diſtantiam $= a$ parallelam.

§. 5. Quodſi iam ſimili modo ſuper dato plano omnia ſolida exſtruenda quaeri debeant, in quibus omnes rectae a plano ad ſuperficiem normaliter ductae inter ſe ſint aequales; primo quidem patet huic quaeſtioni ſatisfacere ſuperficiem planam dato plano parallelam. Deinde etiam manifeſto ſatisfacit hemiſphaerium ſuper plano exſtructum, quippe cuius omnes radii ad ſuperficiem ſunt normales. Tertio vero etiam euidens eſt ſatisfacere cylindrum, cuius axis in ipſum planum incidat; ex quo facile intelligere licet, praeterea quoque infinita alia corporum genera huic quaeſtioni eſſe ſatisfactura, quae omnia ergo ſolutio, ſiquidem fuerit generalis, indicare debet.

§. 6. Quaeſtio igitur haec manifeſto in nouum illud Analyſeos genus incurrit, quod in euoluendis functionibus duarum variabilium verſatur, ideoque vires Analyſeos communis ſuperare eſt cenſenda; verum tamen haec eadem quaeſtio ideo potiſſimum maximam attentionem meretur, quod adeo per prima Geometriae elementa reſolui poteſt, vnde ſolutio Analytica, quae ob nouitatem pluribus Geometris adhuc ſuſpecta videri poſſet, maximum firmamentum adipiſcetur. Vtramque igitur ſolutionem ſeorſim omni ſtudio expediamus.

Solu-

Solutio Analytica problematis propoſiti.

§. 7. Cum igitur haec quaeſtio circa ſuperficiem ſuper dato plano exſtruendam verſetur, referat tabula hoc ipſum planum, in quo pro lubitu ſtatuantur bini axes fixi O A et
Tab. II. O B inter ſe normales, ſecundum quos in ipſo plano conſti-
Fig. 2. tuantur binae coordinatae $OX = x$ $OY = y$, tertia autem, ex puncto Y ad ipſam ſuperficiem perpendiculariter erecta, vocetur $YZ = z$, quibus poſitis eiusmodi aequatio inter has ternas coordinatas x, y et z indagari debet, vt omnes rectae Z N, quae ad ſuperficiem normaliter in ſingulis punctis Z ſunt ductae, fiant inter ſe aequales, hoc eſt, quaeritur, qualis functio quantitas z binarum variabilium x et y eſſe debeat, vt iſta conditio adimpleatur.

§. 8. Quoniam igitur coordinatam z tanquam functionem duarum reliquarum x et y ſpectamus, ſi eam differentiemus, ſumendo tam x quam y variabilem, huiusmodi formula exorietur: $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, et nunc ratio binarum quantitatum p et q inueſtigari debet, vt conditioni praeſcriptae ſatisfiat. In genere quidem conſtat, has duas quantitates p et q tales functiones ipſarum x et y eſſe debere, vt formula differentialis $p\,\partial x + q\,\partial y$ integrationem admittat, id quod eueniet, ſi fuerit $(\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$, vbi formula $(\frac{\partial p}{\partial y})$ naſcitur ex differentiatione ipſius p, ſi ſola y pro variabili accipiatur; ſimilique modo altera formula $(\frac{\partial q}{\partial x})$ naſcitur ex differentiatione ipſius q, ſi ſola x variabilis ſtatuatur.

§. 9. Sit nunc N punctum in noſtro plano, in quod recta Z N, quae ad ſuperficiem in puncto Z eſt normalis, incidit, ita vt per conditionem praeſcriptam eſſe oporteat

Z N

ZN $= a$. Ex elementis autem Solidorum paſſim traditis notum eſt, quantitatem huius rectae Z N ita exprimi, vt ſit Z N $= z\surd(1 + pp + qq)$, ita vt tota ſolutio ex hac aequatione: $z\surd(1 + pp + qq) = a$ peti debeat. Quanquam autem iſtam formulam $z\surd(1 + pp + qq)$ tuto ex elementis depromere liceret; tamen hic facilem viam indicabo, hanc ipſam formulam, ſine vllis ambagibus, ex ſola notione qua recta Z N ad ſuperficiem normalis ſtatuitur, inueniendi, quae in hoc conſiſtit, vt, etiamſi punctum Z parumper in ſuperficie mutetur, longitudo rectae Z N inde nullam mutationem patiatur.

§. 10. Hoc principio conſtituto ducatur ex puncto quaeſito N ad axem O A normalis N M, ac vocetur O M $= m$ et M N $= n$, ductaque recta Y I axi O A parallela, erit ininteruallum X M $=$ Y I $= m - x$ et interuallum I N $= n - y$, vnde fit $YN^2 = (m - x)^2 + (n - y)^2$. Iam quia recta YZ toti plano, ideoque rectae Y N, normaliter inſiſtit, ob Y Z $= z$, erit

$$ZN^2 = (m - x)^2 + (n - y)^2 + zz,$$

quae quantitas quia inuariata manere debet, etiamſi punctum z infinite parum mutetur, differentiale ipſius formulae, ſumendo x, y et z variabilibus, nihilo aequari debet. Sumatur igitur primo ſola x variabilis, manente y conſtante, et quia tum eſt $\partial z = p\,\partial x$, erit differentiale

$$- 2\,\partial x\,(m - x) + 2\,zp\,\partial x = 0,$$

ſiue $- m + x + pz = 0$. Simili modo ſi ſola y pro variabili ſumatur, quia tum eſt $\partial z = q\,\partial y$, differentiatio dat

$$- 2\,\partial y\,(n - y) + 2\,zq\,\partial y = 0,$$

ſiue $- n + y + qz = 0$.

§. 11. Conſideratio igitur, quod recta N Z ad ipſam ſuperficiem eſt normalis, nobis has duas conditiones ſuppeditat: 1°. $m = x + p z$ et 2°. $n = y + p z$, ſicque erunt interualla $YI = p z$ et $IN = q z$, quibus valoribus locus puncti N definitur, in quod normalis Z N ad Z ducta incidit. Hinc igitur cum ſit $YN = z\sqrt{(pp + qq)}$, erit ipſa normalis $ZN = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, quae eſt eadem formula, quae vulgo per longas ambages erui ſolet.

§. 12. Cum igitur reſolutio noſtri problematis perducta ſit ad hanc aequationem: $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$, ex qua primo ratio functionum p et q, hinc vero porro ipſa aequatio inter ternas coordinatas x, y et z erui debet, ſumtis quadratis habebimus $pp + qq = \frac{aa - zz}{zz}$, cui aequationi vt ſatisfiat, ſtatuamus

$$p = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} \operatorname{coſ.} \Phi \text{ et } q = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} \operatorname{ſin.} \Phi,$$

quare cum conditio principalis poſtulet vt ſit $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, erit

$$\partial z = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z}(\partial x \operatorname{coſ.} \Phi + \partial y \operatorname{ſin.} \Phi), \text{ ſiue}$$

$$\frac{z\,\partial z}{\sqrt{(aa - zz)}} = \partial x \operatorname{coſ.} \Phi + \partial y \operatorname{ſin.} \Phi,$$

cuius aequationis prius membrum cum per ſe ſit integrabile, etiam alterum integrabile ſit neceſſe eſt. Cum igitur per notam reductionem ſit

$$\int \partial x \operatorname{coſ.} \Phi = x \operatorname{coſ.} \Phi + \int x\,\partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi \text{ et}$$

$$\int \partial y \operatorname{ſin.} \Phi = y \operatorname{ſin.} \Phi - \int y\,\partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi,$$

integratione, quatenus fieri poteſt, inſtituta obtinebimus

$$C - \sqrt{(aa - zz)} = x \operatorname{coſ.} \Phi + y \operatorname{ſin.} \Phi + \int \partial \Phi (x \operatorname{ſin.} \Phi - y \operatorname{coſ.} \Phi).$$

Totum igitur negotium huc redit, vt formula differentialis $\partial \Phi (x \operatorname{ſin.} \Phi - y \operatorname{coſ.} \Phi)$ reddatur integrabilis, quae cum vnicum

cum differentiale $\partial\phi$ contineat, neceſſe eſt vt factor x ſin. ϕ $-y$ coſ. ϕ, ſit functio ſolius quantitatis ϕ.

§. 13. Denotet igitur Φ functionem quamcunque ipſius ϕ, ac ſtatuatur: x ſin. $\phi + y$ coſ. $\phi = \Phi$, eritque

$$\int \partial\phi\,(x \text{ ſin. } \phi + y \text{ coſ. } \phi) = \int \Phi\, \partial\phi,$$

quae expreſſio ſemper vt data conſiderari poteſt, cuiuscunque naturae aſſumta fuerit functio Φ: ſemper enim per quadraturam facile aſſignari poteſt. Nam ſi pro lubitu curua quaecunque oq deſcribatur, cuius abſciſſa op deſignetur per ϕ, applicata vero pq per Φ, area huius curuae opq dabit valorem formulae noſtrae integralis $\int \Phi\, \partial\phi$; hac ergo introducta aequatio noſtra erit Tab. II. Fig. 3.

$$C - \sqrt{(aa - zz)} = x \text{ coſ. } \phi + y \text{ ſin. } \phi + \int \Phi\, \partial\phi.$$

§. 14. Introducta igitur in calculum noua variabili ϕ, loco Φ functionem quamcunque ipſius anguli ϕ accipere licet, quo facto ad duas deducti ſumus aequationes

1°. x ſin. $\phi - x$ coſ. $\phi = \Phi$ et

2°. x coſ. $\phi + y$ ſin. $\phi = -\sqrt{(aa - zz)} - \int \Phi\, \partial\phi$,

vbi in ſecunda conſtantem C omiſimus, quandoquidem in formula $\int \Phi\, \partial\phi$ inuoluitur. Ne autem valoribus negatiuis impediamur, loco Φ ſcribamus $-\Phi$, vt habeamus iſtas duas aequationes:

I. y coſ. $\phi - y$ ſin. $\phi = \Phi$ et

II. x coſ. $\phi + y$ ſin. $\phi = \int \Phi\, \partial\phi - \sqrt{(aa - zz)}$,

ex quibus definire poterimus ambas coordinatas x et y, quae ita exprimentur:

$$x = \text{coſ.}\,\phi \int \Phi\, \partial\phi - \Phi \text{ ſin.}\,\phi - \text{coſ.}\,\phi \sqrt{(aa - zz)} \text{ et}$$

$$y = \text{ſin.}\,\phi \int \Phi\, \partial\phi + \Phi \text{ coſ.}\,\phi - \text{ſin.}\,\phi \sqrt{(aa - zz)}.$$

 Hoc

Hoc igitur modo per duas variabiles Φ et z ambas coordinatas x et y ita determinauimus, vt vtraque ſit certa functio binarum variabilium z et Φ. Sumtis enim pro lubitu tam Φ quam z, inde valores ipſarum x et y aſſignari poterunt, quibus inuentis omnia ſuperficiei puncta erunt determinata.

§. 15. Solutio autem haec multo latius patet quam vulgo videri queat, propterea quod loco Φ non ſolum omnes functiones ipſius Φ, tam algebraicae quam tranſcendentes, aſſumi poſſunt, ſed etiam adeo functiones diſcontinuae, quas per nullas formulas analyticas exprimere licet, non excluduntur, Scilicet loco curuae illius $o\,q$ lineam quamcunque, libero manus ductu deſcriptam, aſſumere licet, etiamſi ſub nulla aequatione analytica comprehendi queat; tum enim poſita abſciſſa $o\,p = \Phi$, applicata reſpondens $p\,q$ dabit functionem Φ et ipſa area $o\,p\,q$ ſuppeditat formulam $\int \Phi\, \partial \Phi$, ex quibus deinceps ipſa ſuperficies problemati ſatisfaciens conſtrui poterit, id quod ergo infinities infinitis modis praeſtari poſſe manifeſtum eſt.

§. 16. Quo autem haec ad praxin propius accommodentur, loco anguli Φ eiusque functionis Φ, duas alias variabiles t et u, quarum altera alterius quoque ſit functio quaecunque, in calculum introduci poterunt. Hunc in finem ſtatuamus:

$$\text{coſ.}\,\Phi \int \Phi\, \partial \Phi - \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi = t \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\,\Phi \int \Phi\, \partial \Phi + \Phi\, \text{coſ.}\,\Phi = u,$$

vt expreſſiones inuerſae euadant:

$$x = t - \text{coſ.}\,\Phi\, \sqrt{(a\,a - z\,z)} \text{ et}$$

$$y = u - \text{ſin.}\,\Phi\, \sqrt{(a\,a - z\,z)},$$

vbi autem neceſſe eſt vt tam ſin. Φ quam coſ. Φ per nouas litteras t et u exprimantur, ſiquidem quantitas Φ penitus ex calculo extrudi debet; quod quidem moleſtiſſimum calculum requi-

requirere videatur; verum ſequenti modo negotium facillime, quaſi praeter omnem expectationem, abſolui poterit.

§. 17. Formulas ſcilicet, quarum loco litteras t et u introduximus, differentiemus, ac reperiemus:

$$\partial t = -\partial\phi \,\text{ſin.}\, \phi \int \Phi\,\partial\phi + \Phi\,\partial\phi \,\text{coſ.}\, \phi$$
$$-\partial\Phi \,\text{ſin.}\, \phi - \Phi\,\partial\phi \,\text{coſ.}\, \phi, \text{ ſiue}$$
$$\partial t = -\text{ſin.}\, \phi\,(\partial\Phi + \partial\phi \int \Phi\,\partial\phi),$$

ſimilique modo reperitur:

$$\partial u = \partial\phi \,\text{coſ.}\, \phi \int \Phi\,\partial\phi + \Phi\,\partial\phi \,\text{ſin.}\, \phi$$
$$+\partial\Phi \,\text{coſ.}\, \phi - \Phi\,\partial\phi \,\text{ſin.}\, \phi, \text{ ſiue}$$
$$\partial u = \text{coſ.}\, \phi\,(\partial\Phi + \partial\phi \int \Phi\,\partial\phi).$$

Vnde patet fore $\frac{\partial t}{\partial u} = -\text{tang.}\, \phi$, ſicque tam ſin. ϕ quam coſ. ϕ ex binis quantitatibus t et u definiuntur; erit ſcilicet:

$$\text{ſin.}\, \phi = -\frac{\partial t}{\sqrt{(\partial t^2 + \partial u^2)}} \text{ et coſ.}\, \phi = \frac{\partial u}{\sqrt{(\partial t^2 + \partial u^2)}}.$$

Quare ſi ponamus $\partial u = s\,\partial t$, erit ſin. $\phi = -\frac{1}{\sqrt{(1+ss)}}$ et coſ. $\phi = \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}$, quamobrem per has nouas quantitates t et u noſtrae coordinatae x et y ita determinabuntur:

$$x = t - \frac{s\sqrt{(aa-zz)}}{\sqrt{(1+ss)}} \text{ et } y = u + \frac{\sqrt{(aa-zz)}}{\sqrt{(1+ss)}},$$

ex quibus ergo ſuperficies quaeſita pariter conſtrui poterit.

§. 18. Cum igitur, conſtituta relatione quacunque inter binas quantitates t et u, ex earum ratione differentialium angulus ϕ ita determinetur, vt ſit tang. $\phi = -\frac{\partial t}{\partial u}$, hunc angulum potius in calculo retineamus; deinde, vt noſtrae formulae concinniores euadant, ſtatuamus $\sqrt{(aa-zz)} = v$, vt ſit $z = \sqrt{(aa-vv)}$, quibus poſitis ambae coordinatae x et y, in plano tabulae accipiendae, hoc modo exprimentur: $x = t - v\,\text{coſ.}\, \phi$ et $y = u - v\,\text{ſin.}\, \phi$; quae ergo denuo binas variabiles a ſe inuicem independentes inuoluunt, ſcilicet t et v, ſi

qui-

quidem u ſpectatur vt functio ipſius t; altera vero v vtcunque variari poteſt, dum t et u eosdem valores retinent; tertia vero coordinata, ad planum tabulae perpendicularis, per ſolam v definitur, cum ſit $z = \sqrt{(aa - vv)}$.

§. 19. Cum igitur relatio inter t et u penitus arbitrio noſtro relinquatur, eas tanquam coordinatas curuae cuiuscunque in plano tabulae deſcribendae ſpectare licebit, quae ita a lubitu noſtro pendet, vt etiam lineae quaecunque libero manus tractu ducendae admitti queant, ita vt non opus ſit certam relationem analyticam inter t et u exhibere. Deſcripta igitur in plano tabulae pro lubitu curua quacunque E U F, pro eius puncto quocunque U vocetur abſciſſa, in axe C A aſſumta, O T $= t$ et applicata T U $= u$, ita vt haec curua pro qualibet abſciſſa O T $= t$ reſpondentem applicatam T U $= u$ oſtendat. Nunc igitur conſtat anguli E U T tangentem eſſe $= \frac{\partial t}{\partial u}$, ita vt anguli deinceps poſiti T U F tangens ſit $= -\frac{\partial t}{\partial u}$, vnde patet hunc angulum T U F praebere ipſum angulum Φ, quo in noſtris formulis indigemus.

Tab. II. Fig. 4.

§. 20. Ducatur nunc ad hanc curuam normalis U S, eritque angulus T U S $= \Phi - 90°$; vnde ſi in hac normali U S reſcindatur interuallum U V $= v$, ducaturque axi parallela V R, erit

$$VR = v\,\text{ſin.}\,(\Phi - 90) = -v\,\text{coſ.}\,\Phi$$

et interuallum

$$UR = v\,\text{coſ.}\,(\Phi - 90) = v\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

atque his lineis introductis habebimus $x = OT + RV$ et $y = TU - UR$. Quamobrem ſi ex V ad axem demittatur perpendiculum V X, cum ſit O X $=$ O T $+$ R V et V X $=$ T U $-$ U R, habebimus O X $= x$ et X V $= y$, ſicque punctum V id ipſum erit, cui in prima figura adſcripta fuerat littera

littera Y. Quodſi iam ex puncto V erigatur ad planum perpendiculum $VZ = \surd(aa - vv)$, ob $z = \surd(aa - vv)$, erit punctum Z in ipſa ſuperficie quam quaerimus; et cum ſit interuallum $ZU = a$, quod exhibet ipſam normalem ad noſtram ſuperficiem, hinc patet omnes normales in ipſam curvam E U F incidere.

§. 21. Quodſi iam hanc ſuperficiem inuentam ſecari concipiamus plano ad tabulam normali et per U S tranſeunte, in hac ſectione reperietur punctum Z, vnde pro figura huius ſectionis, ſi recta $UV = v$ ſumatur pro abſciſſa et $VZ = z$ pro applicata, aequatio erit $z = \surd(aa - vv)$; vnde patet hanc ſectionem eſſe circulum, centro U, radio $ZU = a$ deſcriptum. Cum igitur omnes ſectiones ad planum tabulae perpendiculariter factae, ſimulque ad curuam E U F normales, ſint circuli radio a deſcripti, quorum centra iugiter in curuam E U F incidant, tota ſuperficies, quam quaerimus, erit cognita; ſimulque perſpicitur, numerum omnium ſolutionum revera eſſe infinitum, propterea quod curua E U F prorſus pro arbitrio deſcribi poteſt.

§. 22. In hac igitur ſolutione elucet character principalis, quo omnia problemata circa functiones duarum variabilium, quae integrationem requirunt, diſtinguuntur, et qui in hoc conſiſtit, vt integratio non ſolum quantitatem conſtantem, veluti in integrationibus communibus vſu venit, ſed eius loco functionem adeo arbitrariam in calculum introducat, quae in noſtra ſolutione per curuam E U F, pro lubitu ducendam repraeſentatur. Quare cum haec inſignis proprietas nondum ſatis a Geometris ſit perpenſa, atque adeo a nonnullis in dubium vocetur, hoc problema maxime idoneum eſt viſum ad grauiſſimam hanc veritatem extra omne dubium collocandam,

propte-

propterea quod eadem ſolutio ex primis Geometriae elementis deduci potuiſſet.

Solutio ſynthetica eiusdem problematis.

§. 23. Cum circulus centro C radio C N = C M
Tab. II. Fig. 5. deſcriptus hanc habeat proprietatem, vt omnes normales Z C ad centrum C tendant, ideoque inter ſe ſint aequales, manifeſtum eſt, ſi plures huiusmodi circuli ad planum tabulae perpendiculariter conſtituantur, in ſingulis omnes normales aequales fore. Tantum igitur ſupereſt, vt circuli illi continua ſerie ita diſponantur, vt normales illae C Z etiam ad circulos proxime contiguos normales ſint, id quod euenit, ſi centrum C in directione C c, ad diametrum M N normali, ſuper plano promoueatur.

§. 24. Huic autem conditioni manifeſto ſatisfiet, ſi ſemicirculus ille M Z N, ad planum tabulae perpendiculariter
Fig. 6. erectus, ita promoueatur, vt eius centrum ſuper curua quacunque E U F protrahatur, ita vt eius diameter M N ad illam curuam E U F perpetuo teneat ſitum normalem, ſiue vt recta M N vbique curuam in U ad angulos rectos ſecet. Hoc enim modo peripheria iſtius circuli talem ſuperficiem deſcribet, cuius omnes normales, quae perpetuo ad ipſam curuam E U F dirigentur, ſint inter ſe aequales. Euidens autem eſt hanc conſtructionem cum praecedente ſolutione analytica prorſus conuenire.

§. 25. Iam obſeruauimus curuam iſtam directricem E U F penitus ab arbitrio noſtro pendere, atque adeo ex pluribus partibus pro lubitu componi poſſe, quin etiam, vbicunque lubuerit, terminari poterit. Immo etia mloco huius curuae vnicum

cum punctum aſſumi poteſt, cui ſi centrum circuli inſiſtat, et interea circulus motu angulari circumferatur, orietur hemiſphaerium, cuius vtique omnes normales, vtpote radii ſphaerae, inter ſe erunt aequales.

§. 27. Si linea illa directrix E U F fuerit recta, et ſuper ea centrum circuli plano tabulae perpetuo normaliter inſiſtentis ita promoueatur, vt diameter M N vbique rectam E F normaliter traiiciat, peripheria circuli deſcribet ſuperficiem cylindricam, quam problemati noſtro ſatisfacere per ſe patet. At ſi recta M N in puncto F ſubito terminetur, poſtquam centrum circuli eo vsque peruenerit, ibi quieſcet, circulus autem motu angulari circumducetur, quo pacto cylindrus ille hic deſinet in hemiſphaerium ſemicirculo *m i n* inſiſtens. Tab. II. Fig. 7.

§. 28. Quodſi linea directrix E F etiam fuerit circulus, radio maiore quam A deſcriptus, et centrum circuli minoris ſuper eius peripheria ita circumferatur, vt diameter M N vbique directricem normaliter traiiciat, hoc modo generabitur corpus cylindrum quaſi incuruatum referens, farciminis figuram mentientem, ac ſi termino cylindri incuruati vti velimus, affirmare licebit, omnia corpora problemati noſtro ſatisfacientia ad genus cylindrorum incuruatorum referri poſſe. Fig. 8.

Problema generalius.

Super dato plano eiusmodi ſolidum exſtruere, ad cuius ſuperficiem ſi in ſingulis punctis normales ducantur, eae ad eleuationem ſuper plano relationem teneant quamcunque datam.

Solutio.

§. 29. Manentibus omnibus denominationibus, quibus ſupra vſi ſumus, ita vt poſito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, normalis ad ſuperficiem ſit $ZN = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, haec normalis Fig. 2.

 cum

cum ante eſſe debuerat conſtans, nunc requiritur vt certae cuipiam functioni datae altitudinis YZ $= z$ aequetur, quae ergo functio ſi ſtatuatur $= Z$, ſolutio problematis hac continebitur aequatione: $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = Z$.

§. 30. Ex hac igitur aequatione ſtatim deducimus $pp + qq = \frac{Z^2 - z^2}{zz}$; vnde ſi ponamus $p = \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{z}\sqrt{(Z^2 - z^2)}$, fiet $q = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{z}\sqrt{(Z^2 - z^2)}$. Quare cum eſſe debeat $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, facta ſubſtitutione habebimus:

$$\partial z = \frac{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}{z}(\partial x \,\text{coſ.}\,\Phi + \partial y \,\text{ſin.}\,\Phi),$$

vnde colligitur

$$\frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}} = \partial x \,\text{coſ.}\,\Phi + \partial y \,\text{ſin.}\,\Phi,$$

vbi cum membrum ſiniſtrum per ſe ſit integrabile, quippe vnicam variabilem z inuoluens, etiam membrum dextrum per ſe integrabile reddendum eſt; vnde ſi differentialia ad elementum $\partial\Phi$ reducamus, nanciſcemur, vt ante, hanc aequationem:

$$\int\frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}} = x\,\text{coſ.}\,\Phi + y\,\text{ſin.}\,\Phi + \int\partial\Phi(x\,\text{ſin.}\,\Phi - y\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

§. 31. Neceſſe igitur eſt, vt formula $x\,\text{ſin.}\,\Phi - y\,\text{coſ.}\,\Phi$ ſit functio vnius variabilis Φ, quae ponatur $= -\varPhi$ vt ſit $y\,\text{coſ.}\,\Phi - x\,\text{ſin.}\,\Phi = \varPhi$. Deinde quia integrale $\int\frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$ vt cognitum ſpectare licet, eius loco ſcribamus litteram v, vt ſit $v = \int\frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, et aequatio noſtra hanc induet formam:

$$v = x\,\text{coſ.}\,\Phi + y\,\text{ſin.}\,\Phi - \int\varPhi\,\partial\Phi, \text{ vnde fit}$$
$$x\,\text{coſ.}\,\Phi + y\,\text{ſin.}\,\Phi = v + \int\varPhi\,\partial\Phi,$$

ex qua aequatione, cum illa: $y\,\text{coſ.}\,\Phi - x\,\text{ſin.}\,\Phi = \varPhi$ combinata, deducuntur ſequentes valores:

$$x = v\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,\Phi\int\varPhi\,\partial\Phi - \varPhi\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et}$$
$$y = v\,\text{ſin.}\,\Phi + \text{ſin.}\,\Phi\int\varPhi\,\partial\Phi + \varPhi\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

ita

ita vt iam x et y per binas variabiles ϕ et v exprimantur, dum tertia coordinata z per ſolam v definitur.

§. 32. Iam pariter, vt ante fecimus, loco variabilis ϕ et quantitatum independentium Φ et $\int \Phi \partial \phi$ introducamus quantitates t et u, ponendo

$$t = \text{coſ.}\, \phi \int \Phi \partial \phi - \Phi\, \text{ſin.}\, \phi,$$

$$u = \text{ſin.}\, \phi \int \Phi \partial \phi + \Phi\, \text{coſ.}\, \phi,$$

vnde cum ſequatur, vt ſupra oſtendimus, tang. $\phi = -\frac{\partial t}{\partial u}$, angulus ϕ iam per t et u dabitur; vnde naſcuntur hae formulae:

$$x = t + v\, \text{coſ.}\, \phi \text{ et } y = u + v\, \text{ſin.}\, \phi.$$

§. 33. Ad has formulas conſtruendas deſcribatur, prorſus vt ſupra, ſuper axe O A, curua quaecunque pro lubitu E U F, ſiue continua, ſiue diſcontinua, cuius coordinatae ſint O T $= t$ et T U $= u$, atque angulus T U F aequalis erit angulo noſtro ϕ, vnde ſi ad hanc curuam producatur normalis S U, erit angulus T U S $= \phi - 90°$. Iam in normali S U producta capiatur interuallum U V $= v$, et demiſſo ex V ad axem O A perpendiculo V R X, ad idque normali U R, quia angulus U V X $= \phi - 90°$, in triangulo V U R habebimus: Tab. II. Fig. 9.

$$\text{U R} = v\, \text{ſin.}\, (\phi - 90°) = - v\, \text{coſ.}\, \phi,$$

$$\text{V R} = v\, \text{coſ.}\, (\phi - 90°) = \quad v\, \text{ſin.}\, \phi,$$

ex quibus colligitur $x =$ O T $-$ U R et $y =$ U T $+$ V R, ſicque patet fore $x =$ O X et $y =$ X V; vnde ſingula puncta rectae U V praebent binas coordinatas in plano tabulae ſumtas x et y.

§. 34. Quodſi ergo ex puncto V ad planum tabulae normaliter erigatur recta V Z $= z$, ita a v pendens, vt ſit

$v =$

$v = \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, erit punctum Z in ipſa ſuperficie quam quaerimus, cuius ſectio verticalis, ſecundum directionem U V facta, talem habebit figuram, vti aequatio $v = \int \frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$ indicat, ſi quidem recta U V $= v$ eius abſciſſam, recta vero V Z $= z$ eius applicatam repraeſentat, hincque figura ſemel deſcripta in ſitu perpendiculari ſecundum directricem E U F ita promota, vt eius axis U V perpetuo ad directricem maneat normalis, deſcribet ſuperficiem ſolidi problemati noſtro ſatisfacientis.

Tab. II. Fig. 10.

§. 35. Nihil aliud igitur ſupereſt, niſi vt figura curvae illius mobilis U Z, cuius abſciſſa U V $= v$ et applicata V Z $= z$, indagetur. Cum igitur ſit $\partial v = \frac{z\,\partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, ſi ad hanc curvam ducatur normalis Z N, erit ſubnormalis

$$V N = \frac{Z\,\partial z}{\partial v} = \sqrt{(Z^2 - z^2)},$$

ideoque ipſa normalis N Z $=$ Z; vnde patet iſtam curuam eam ipſam eſſe in plano deſcriptam, cuius normalis Z N propoſitae functioni Z ſit aequalis. Hac igitur curua deſcripta, eius promotio ſecundum directricem quamcunque ipſam ſuperficiem, quam quaerimus, deſcribet, ſi modo in hoc motu praecepta ante tradita obſeruentur, atque axis initium U perpetuo iuxta directricem promoueatur. Caeterum omnia hic manifeſto ſe perinde habent, vti in problemate priore ſunt expoſita, ita vt etiam hoc problema ex primis elementis Geometriae reſolui potuiſſet, poſtquam ſcilicet deſcripta fuerit curva U Z, quia deinceps per totam ſuperficiem eaedem habentur normales N Z $=$ Z.

Additamentum.

§. 35. Quo clarius perſpiciatur, quomodo curua illa perpetuo in ſitu verticali detinenda ſuper plano horizontali promoueri debeat, contemplemur hic tantum eius Baſin inſtar virgae

virgae rectae M N, plano horizontali incumbentis, quae ita promoueatur, vt pro eius ſingulis punctis directio motus O *o* ad ipſam virgam M N vbique ſit normalis. Tali igitur motu, ſi celeritates in ſingulis punctis virgae fuerint inter ſe aequales, virga motu ſibi parallelo proferetur; ſin autem celeritas in termino M maior fuerit quam in altero termino N, vt poſt tempuſculum infinite paruum perueniat in ſitum *m o n*, eius motus erit angularis, factus circa punctum quodpiam fixum V, in ipſa recta M N producta ſitum, quod punctum quouis momento variari poteſt, dummodo perpetuo cum ipſa virga in directum iaceat. Tab. II. Fig. 11.

§. 37. Huiusmodi igitur motu ſingula virgae puncta O certas curuas deſcribent, quae inter ſe erunt parallelae, ſeu communi euoluta praeditae. Ita ſi communis euoluta fuerit curua A V B, circa quam filum, cum virga M N in directum annexum, ſit circumuolutum et more ſolito euoluatur, hocque motu virga ex ſitu M N in ſitum *m n* perueniat: iſte virgae motus vtique ita erit comparatus, vt ſingula eius puncta quouis momento ſecundum directiones ad ſitum virgae normales promoueantur. Ex quo viciſſim euidens eſt, virgae punctum quoduis O per datam curuam O *o* promoueri poſſe, dummodo perpetuo ipſa virga *m n* ſitum teneat ad hanc curvam normalem; atque adeo hanc curuam O*o* prorſus pro lubitu aſſumere licet, ita vt libero manus tractu quomodocunque deſcribi queat; in quo ipſo conſiſtit vera indoles omnium huiusmodi problematum, quorum ſolutio integrationem functionum duarum variabilium inuoluit. Fig. 12.

§. 38. Deſcripto igitur hoc motu, quo virgam ſuper plano horizontali promoueri aſſumimus, ſi virga M N fuerit baſis curuae cuiuscuque M U N, ad cuius punctum quodvis U ducta ſit normalis U S, haecque figura perpetuo in ſitu Fig. 13.

 verti-

verticali teneatur, dum eius baſis M N, ſuper plano horizontali tali mota, qualem deſcripſimus, vtcunque proferatur, hacque ratione ſuperficies continua deſcribi concipiatur: euidens eſt normalem U S etiam ad ipſam ſuperficiem in puncto U fore normalem, propterea quod motus puncti U fit iuxta directionem ad baſin M N, ideoque etiam ad planum figurae normalem. Hinc igitur patet, quamcunque relationem normalis U S ad applicatam U T tenuerit, eandem quoque proprietatem in totam ſuperficiem hoc modo deſcriptam competere debere, atque in hoc conſiſtit ſolutio ſupra data problematis generalis poſt §. 28. propoſiti.

SOLV-

SOLVTIO FACILIS FROBLEMATIS, QVO QVAERITVR CIRCVLVS, QVI DATOS TRES CIRCVLOS TANGAT.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4 Nouembr. 1779.

§. 1.

Sint A, B, C centra trium circulorum datorum, pro quorum ſitu ſit diſtantia $CA = a$, $CB = b$ et angulus $ACB = C$. Deinde ſint α, β, γ radii horum trium circulorum, O centrum circuli omnes tres tangentis, cuius radius ponatur $= x$. Ductis igitur rectis OA, OB, OC, quae per puncta contactus tranſibunt, habebimus $OA = x + \alpha$, $OB = x + \beta$ et $OC = x + \gamma$. Hic vero ante omnia probe notandum eſt, contactus ſingulorum circulorum non ſolum intus, ſed etiam extus euenire poſſe. Ita ſi circulus C extus tangeretur, foret $OC = x - \gamma$; vnde patet, radios horum circulorum tam negatiue, quam affirmatiue accipi poſſe. Hinc euidens eſt octo ſolutiones locum habere poſſe, quae ſcilicet ex variatione ſignorum litterarum α, β, γ oriuntur. Interim tamen in ſolutione has litteras α, β, γ vt poſitiuas ſpectabimus, calculo vero expedito nihil impedit, quo minus earum vni vel alteri valor negatiuus tribuatur. Tab. I. Fig. 5.

§. 2.

§. 2. Statuamus autem breuitatis gratia $OC = x + \gamma = z$ vt ſit $x = z - \gamma$, tum vero fiat $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, vt prodeat $OA = z + f$ et $OB = z + g$. Quodſi iam vocentur anguli $OCA = p$ et $OCB = q$, ita vt ſit $p + q = C$, ex triangulo OCA, cuius latera ſunt $OC = z$; $OA = z + f$ et $AC = a$, colligitur:

$$\text{coſ.}\, p = \frac{aa + zz - (z+f)^2}{2az} = \frac{aa - 2fz + ff}{2az}.$$

Simili modo ex triangulo OCB, cuius latera ſunt $OC = z$; $OB = z + g$ et $CB = b$, colligitur:

$$\text{coſ.}\, q = \frac{bb + zz - (z+g)^2}{2bz} = \frac{bb - 2gz - gg}{2bz}.$$

Quoniam igitur angulorum p et q ſumma datur $= C$, euidens eſt hinc incognitam z determinari poſſe.

§. 3. Cum igitur ſit $p + q = C$, erit

$$\text{coſ.}\, C = \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, q - \text{ſin.}\, p\, \text{ſin.}\, q,$$

tum vero

$$\text{ſin.}\, C = \text{ſin.}\, p\, \text{coſ.}\, q + \text{coſ.}\, p\, \text{ſin.}\, q,$$

cuius formulae quadratum praebet:

$$\text{ſin.}\, C^2 = \text{ſin.}\, p^2\, \text{coſ.}\, q^2 + \text{coſ.}\, p^2\, \text{ſin.}\, q^2 + 2\, \text{ſin.}\, p\, \text{coſ.}\, q\, \text{coſ.}\, p\, \text{ſin.}\, q.$$

At vero ex priori formula eſt

$$\text{ſin.}\, p\, \text{ſin.}\, q = \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, q - \text{coſ.}\, C,$$

quo valore ſubſtituto prodit

$$\text{ſin.}\, C^2 = \text{ſin.}\, p^2\, \text{coſ.}\, q^2 + \text{coſ.}\, p^2\, \text{ſin.}\, q^2 + 2\, \text{coſ.}\, p^2\, \text{coſ.}\, q^2 - 2\, \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, q\, \text{coſ.}\, C,$$

hinc iam cum ſit

$$\text{ſin.}\, p^2 = 1 - \text{coſ.}\, p^2 \text{ et } \text{ſin.}\, q^2 = 1 - \text{coſ.}\, q^2,$$

haec aequatio induet iſtam formam:

$$\text{ſin.}\, C^2 = \text{coſ.}\, p + \text{coſ.}\, q - 2\, \text{coſ.}\, p\, \text{coſ.}\, q\, \text{coſ.}\, C.$$

§. 4.

§. 4. Quo iam hanc aequationem facilius reſoluamus, ſtatuamus breuitatis gratia $aa - ff = 2F$ et $bb - gg = 2G$, vt ſit $\text{coſ.}\, p = \frac{F - fz}{az}$ et $\text{coſ.}\, q = \frac{G - gz}{bz}$, quibus valoribus ſubſtitutis noſtra aequatio erit

$$\text{ſin.}\, C^2 = \frac{(F - fz)^2}{aazz} + \frac{(G - gz)^2}{bbzz} - 2\frac{(F - fz)(G - gz)\,\text{coſ.}\, C}{abzz},$$

quae aequatio in ordinem redacta euadet:

$$\begin{aligned} aabbzz\,\text{ſin.}\, C^2 = {} & bbF^2 - 2bbFfz + bbffzz \\ & + aaG^2 - 2aaGgz + aaggzz \\ & - 2abFG\,\text{coſ.}\, C + 2abGfz\,\text{coſ.}\, C \\ & - 2abfgzz\,\text{coſ.}\, C + 2abFgz\,\text{coſ.}\, C. \end{aligned}$$

Aequatio igitur inuenta ſub hac forma repraeſentari poteſt: $Lzz - 2Mz + N = 0$, exiſtente

$$\begin{aligned} L &= bbff + aagg - aabb\,\text{ſin.}\, C^2 - 2abfg\,\text{coſ.}\, C, \\ M &= bbFf + aaGg - ab\,\text{coſ.}\, C\,(Gf + Fg), \\ N &= bbF^2 + aaG^2 - 2abFG\,\text{coſ.}\, C. \end{aligned}$$

Quoniam igitur valores litterarum L, M, N ſunt cogniti, ex reſolutione huius aequationis quadraticae colligitur fore $z = \frac{M \pm \sqrt{(M^2 - LN)}}{L}$. Vnde patet binas ſolutiones prodire, atque adeo ambas reales, ſi modo fuerit $M^2 > LN$; conſequenter ob illas octo ſignorum variationes, quae ſupra ſunt commemoratae, omnino ſedecim diuerſae videntur dari ſolutiones, id quod eo magis notari meretur, quod omnes iſtae ſolutiones tantum ex aequatione quadratica deducuntur. Praeterea vero imprimis hoc obſeruandum eſt, dari etiam caſus, quibus ſolutio prorſus fit impoſſibilis, id quod euenit, quando fuerit $LN > M^2$.

§. 5. Hoc igitur modo ſolutio noſtri problematis ad calculum non nimis complexum eſt deducta, vnde, quicunque

valores pro quantitatibus cognitis fuerint aſſumpti, per calculum numericum valor ipſius z facile aſſignabitur.

§. 6. Quanquam autem applicatio ad quosuis caſus propoſitos nulla laborat difficultate, tamen, quando aequatio quadratica radicem negatiuam inuoluit, ita vt littera z negatiuum obtineat valorem, non tam facile perſpicitur, quo modo tales caſus ſint repraeſentandi. Omnis autem difficultas euaneſcet, ſi oſtenderimus, valores negatiuos pro z inuentos proprie non ad ipſum caſum propoſitum pertinere, ſed ad eum caſum, quo radiis circulorum α, β, γ contraria ſigna tribuuntur; vnde fit, vt, etiamſi quaelibet aequatio quadratica duas complectatur radices, tamen omnino non plures quam octo ſolutiones locum habere queant.

§. 7. Quod quo clarius perſpiciatur, ante omnia obſeruaſſe iuuabit, cum ſit $\alpha - \gamma = f$ et $\beta - \gamma = g$, mutatis ſignis litterarum α, β, γ etiam f et g contraria ſigna recipere; nihilo vero minus litterae deriuatae $F = \frac{aa - ff}{2}$ et $G = \frac{bb - gg}{2}$, nullam patiuntur mutationem. Hinc cum ſit

$$L = bbff + aagg - aabb \text{ ſin. } C^2 - abfg \text{ coſ. } C,$$

euidens eſt, mutatis litterarum f et g ſignis litteram L eandem manere; at quia eſt

$$M = bbFf + aaGg - ab \text{ coſ. } C\,(Gf + Fg),$$

mutatis litterarum f et g ſignis etiam ſignum litterae M immutatur; denique vero ob

$$N = bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \text{ coſ. } C$$

etiam littera N idem ſignum conſeruabit. Quamobrem mutatis ſignis radiorum α, β, γ ſolutio perducet ad hanc aequationem:

$$Lzz + 2Mz + N = 0,$$

quae

quae eadem aequatio prodit, ſi z negatiue capiatur. Ex quo ſequitur, quoties valor ipſius z prodit negatiuus, tum eum reſpondere caſui quo radiis α, β, γ contraria ſigna tribuuntur; ita vt bini caſus α, β, γ et $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ ad eandem aequationem quadraticam perducant, cuius radix poſitiua priori caſui conuenit, negatiua vero poſteriori, quae autem tum vt poſitiua eſt ſpectanda. Hinc igitur manifeſtum eſt, tantum quatuor diuerſas aequationes quadraticas prodire poſſe, quarum quaelibet binos caſus complectatur, vti hoc ſchema declarat:

$$\text{I.}\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma\\-\alpha-\beta-\gamma\end{cases};\ \text{II.}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma\\-\alpha-\beta+\gamma\end{cases};\ \text{III.}\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma\\-\alpha+\beta-\gamma\end{cases};\ \text{IV.}\begin{cases}-\alpha+\beta+\gamma\\+\alpha-\beta-\gamma\end{cases}.$$

Hoc obſeruato adplicatio ad quaeuis exempla nulli amplius difficultati erit obnoxia.

§. 8. Verum quia hoc problema eſt geometricum, non tam calculus numericus, quam conſtructio geometrica deſiderari ſolet, quae vtique nimis prodiret operoſa, ſi eam ex aequatione quadratica $Lzz - 2Mz + N = 0$, deriuare vellemus; quamobrem hic plurimum iuuabit talem conſtructionem ex ipſis calculi principiis deriuaſſe.

Conſtructio problematis propoſiti.

§. 9. Ponatur angulus datus $ACB = 2\zeta$, ac ſtatuatur angulus $ACO = p = \zeta + \Phi$ & $BCO = q = \zeta - \Phi$, calculumque ita inſtruamus, vt angulus Φ fiat noſtra incognita. Habebimus ergo

$$\text{coſ.}(\zeta + \Phi) = \frac{F}{az} - \frac{f}{a} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}(\zeta - \Phi) = \frac{G}{bz} - \frac{g}{b},$$

hinc eliminando z erit

$$\frac{G}{b}\,\text{coſ.}\,(\zeta+\Phi)-\frac{F}{a}\,\text{coſ.}\,(\zeta-\Phi)=\frac{Fg-Gf}{ab},\ \text{ſiue}$$

$$a\,G\,\text{coſ.}\,(\zeta+\Phi)-b\,F\,\text{coſ.}\,(\zeta-\Phi)=F\,g-G\,f,$$

quae aequatio porro euoluta dat

$$\left.\begin{array}{l} a\,G\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi-a\,G\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\Phi \\ -b\,F\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi-b\,F\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\Phi \end{array}\right\}=F\,g-G\,f,$$

ſiue

$$G\,f-F\,g=(b\,F-a\,G)\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\Phi+(a\,G+b\,F)\,\text{ſin.}\zeta\,\text{ſin.}\Phi.$$

Ponatur hic breuitatis gratia, $G\,f-F\,g=L$; $b\,F-a\,G=M$ et $a\,G+b\,F=N$, habebimus hanc aequationem:

$$L=M\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\Phi+N\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

cuius conſtructio ſequenti modo erui poterit. Introducatur angulus θ, vt ſit tang. $\theta=\frac{M\,\text{coſ.}\,\zeta}{N\,\text{ſin.}\,\zeta}$, vt adeo iſte angulus θ ſit cognitus; hinc ergo fiet

$$\text{ſin.}\,\theta=\frac{M\,\text{coſ.}\,\zeta}{\sqrt{(M^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2+N^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2)}}\ \text{et}$$

$$\text{coſ.}\,\theta=\frac{N\,\text{ſin.}\,\zeta}{\sqrt{(M^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2+N^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2)}}.$$

Cum igitur ſit

$$N\,\text{ſin.}\,\zeta=\text{coſ.}\,\theta\,\sqrt{(M^2\,\text{coſ}\,\zeta^2+N^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2)}\ \text{et}$$

$$M\,\text{coſ.}\,\zeta=\text{ſin.}\,\theta\,\sqrt{(M^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2+N^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2)},$$

his ſubſtitutis erit

$$\frac{L}{\sqrt{(M^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2+N^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2)}}=\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi+\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\Phi=\text{ſin.}\,(\theta+\Phi).$$

Quodſi iam ille angulus, cuius ſinus eſt $\frac{L}{\sqrt{(M^2\,\text{coſ.}\,\zeta^2+N^2\,\text{ſin.}\,\zeta^2)}}$, ponatur $=\lambda$, habebitur iſta aequatio: ſin. $\lambda=$ ſin. $(\theta+\Phi)$, vnde quia etiam eſt ſin. $\lambda=$ ſin. $(180^\circ-\lambda)$, habebimus duplicem aequationem: altera dat $\theta+\Phi=\lambda$, ideoque $\Phi=\lambda-\theta$; altera vero aequatio dat $\Phi=180^\circ-\lambda-\theta$. Si autem loco L, M et N valores aſſumpti reſtituantur, prodibit tag. $\theta=\frac{(b\,F-a\,G)\,\text{coſ.}\,\zeta}{(a\,G+b\,F)\,\text{ſin.}\,\zeta}$, vnde angulus θ facile colligitur.

Porro

Porro vero erit

$$\sqrt{}(M^2 \text{coſ.} \zeta^2 + N^2 \text{ſin.} \zeta^2) = \sqrt{}(bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \text{coſ.} 2\zeta),$$

quae formula radicalis ergo facile conſtruitur per triangulum PQR, cuius angulus $PQR = 2\zeta$ et latera $PQ = bF$ et $PR = aG$; tum enim erit tertium latus Tab. I. Fig. 6.

$$QR = \sqrt{}(bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \text{coſ.} 2\zeta).$$

Denique erit $\text{ſin.} \lambda = \frac{Gf - Fg}{QR}$, ex quo etiam angulus λ facile conſtruitur, vnde determinatio anguli Φ, ideoque rectae CO innoteſcit, nec non ipſa quantitas

$$CO = z = \frac{F}{f + a \text{coſ.} (\zeta + \Phi)}.$$

SOLVTION DU PROBLÈME DE TROUVER UN CERCLE QUI TOUCHE TROIS CERCLES DONNÉS DE GRANDEUR ET DE POSITION.

Par

NICOLAS FVSS.

Préſenté à la Conférence le 29 Janvier 1789.

On trouve dans la ſeconde partie des Actes de l'Académie, pour l'année 1780, une ſolution de feu M. Euler, & une autre de moi, d'un Problème traité par Pappus d'Alexandrie, & dont M. de Caſtillon, le Père, avoit renouvellé, dans ce tems-là, la mémoire. (*) Il s'agiſſoit de conſtruire, dans un cercle donné de grandeur & de poſition, un triangle dont les côtés prolongés paſſaſſent par trois points donnés. En parcourant, à l'occaſion de ce Problème, les Oeuvres de Pappus, l'attention de M. Euler fut fixée par le Théorème 10e du IVe Livre, qui porte que le diamètre d'un cercle qui touche trois cercles donnés cotingens, eſt donné. Il ſe mit à méditer ſur les moyens de déterminer le rayon d'une

(*) Ce Problème a été réſolu depuis d'une manière beaucoup plus générale & très-élégante, par deux habiles Géomètres Italiens, par D. Annibal Giordano di *Ottajano* & par M. François *Malfatti* Profeſſeur des Mathématiques à Ferrare. V. *Memorie di Matematica & Fiſica della Società Italiana.* Tomo IV. pag. 4 & 201.

d'un cercle qui touche trois cercles de grandeur & poſition quelconque, & trouva la belle ſolution qu'il a communiquée à l'Academie le 4 Novembre 1779.

Dans le même tems j'avois auſſi trouvé une ſolution purement analytique de ce Problème & différente, par conſequent, de celle de M. Euler qui avoit fait uſage d'angles & de propriétés trigonométriques. Mais quoique cette ſolution ne le cedât point à celle de M. Euler, du côté de la ſimplicité, & que j'euſſe trouvé, dans la ſuite, une autre ſolution pareillement trigonométrique, analogue à celle de M. Euler, & douée de l'avantage d'offrir des moyens de conſtruction d'une grande élégance: je les avois mis de côté, croyant inutile de multiplier les ſolutions d'un Problème qui, depuis Apollonius Pergaeus, a été traité par tant de Géomètres & de tant de manières différentes, d'un Problème qui fait le ſujet principal du Traité de Viéte, connu ſous le titre d'Apollonius Gallus, & qui eſt devenu fameux, en quelque façon, par les grands noms qui brillent dans ſon hiſtoire, & par la circonſtance toute particuliere, que deux Dames ſavantes, la Princeſſe Eliſabet de Bohème, connue par ſon amour pour la Géométrie, & la Comteſſe Skortzevska, s'en ſont occupées (*).

J'avois dejà entièrement oublié le Problème & mes ſolutions, lorsque les Oeuvres poſthumes de Lambert, publiées à Berlin par M. Jean Bernoulli, ſont venues me les rappeller en mémoire. J'y ai vu qu'outre Newton, qui en a donné, dans ſon Arithmétique univerſelle, une ſolution peu différente de celle de Viéte, deux autres Géomètres modernes, M. Lambert & le Baron Holland ſe ſont auſſi occupés de ce Problème;

(*) V. Montucla Hiſt. des Math. T. I. p. 263. & Lamberts deutſcher gelehrter Briefwechſel, 5ter Th. S. 308.

blème ; & j'ai été d'autant plus empreſſé à retirer mes ſolutions de l'oubli, auquel je les avois condamné, & à les mettre en ordre, quand j'ai vu que feu M. de Holland étoit parvenu à une équation du quatrième degré presque inextricable, & que les deux ſolutions ébauchées de feu M. Lambert étoient incomparablement plus compliquées que les miennes. Cependant je n'aurois jamais fait aſſez de cas de cette bagatelle, pour la préſenter à l'Académie, & encore moins pour l'inſérer dans les Actes, ſi le Mémoire de feu M. Euler, qui roule ſur le même ſujet, & qui va être imprimé, ne m'eût préſenté l'occaſion de faire paſſer mes deux ſolutions à la ſuite de la ſienne. Je les donne donc, ſurtout la ſeconde, comme une eſpèce de Supplément, à la ſolution de mon illuſtre maître, dont la conſtruction ne ſauroit, à la rigueur, paſſer pour telle.

PREMIERE SOLVTION.

Lemme.

Tab. III. fig. 1. *Si du ſommet C d'un triangle A B C & d'un point quelconque O, on abaiſſe ſur le côté A B les perpendiculaires C D & O P, il y aura toujours* $CO^2 - AO^2 = AC^2 - 2\,CD\,.\,OP - 2\,AD\,.\,AP$.

Démonſtration.

Du point O tirez ſur CD la perpendiculaire OQ, & vous aurez $CO^2 = CQ^2 + OQ^2$. Or $OQ = AP - AD$ & $CQ = CD - OP$, donc

$$CO^2 = CD^2 - 2\,CD\,.\,OP + OP^2 + AP^2 - 2\,AD\,.\,AP + AD^2,$$

ou bien, à cauſe de

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 \text{ et } OP^2 + PA^2 = AO^2,$$

nous

nous aurons :

$$CO^2 = AC^2 - 2CD \cdot OP + AO^2 - 2AD \cdot AP;$$

ou bien

$$CO^2 - AO^2 = AC^2 - 2CD \cdot OP - 2AD \cdot AP.$$

Problème.

Trouver le centre & le rayon d'un cercle qui touche trois cercles donnés de grandeur & de poſition.

Solution.

Soyent A, B, C les centres des trois cercles donnés, les rayons α, β, γ, & les diſtances $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$. Soit le rayon du cercle cherché $= x$, & puiſque CD & AD ſont auſſi données, mettons $CD = f$ & $AD = g$. Et il eſt clair qu'en ſuppoſant que le cercle cherché touche les trois cercles donnés en dehors, on aura $AO = x - \alpha$, $BO = x - \beta$, $CO = x - \gamma$.

Soit pour un inſtant $AP = p$, afin que $BP = a - p$, & les deux triangles AOP & BOP donnent pour OP^2 les deux valeurs ſuivantes :

$$OP^2 = (x - \alpha)^2 - pp;$$

$$OP^2 = (x - \beta)^2 - (a - p)^2;$$

qui égalées nous fourniſſent

$$p = \frac{aa + \alpha\alpha - \beta\beta + 2(\beta - \alpha)x}{2a}.$$

Que ſi nous ſubſtituons cette valeur dans la premiere équation, en mettant pour abréger

$$hh = 4(aa - (\beta - \alpha)^2);$$

$$k^4 = (aa + \alpha\alpha - \beta\beta)^2 - 4aa\alpha\alpha;$$

nous obtiendrons

$$OP^2 = \frac{hhxx - (\alpha + \beta)hhx - k^4}{aa}.$$

En ſubſtituant maintenant, dans l'égalité du Lemme, à la place des lignes toutes leurs valeurs, on aura cette équation :

$$[2a(\alpha-\gamma)+2g(\beta-\alpha)]\,x+f\sqrt{bbxx-(\alpha+\beta)\,bbx-k^4}$$
$$+\,a(\gamma\gamma-\alpha\alpha-cc)+g(aa+\alpha\alpha-\beta\beta)=0.$$

Soit pour plus de ſimplicité :

$$F=2a(\alpha-\gamma)+2g(\beta-\alpha);$$
$$G=a(\gamma\gamma-\alpha\alpha-cc)+g(aa+\alpha\alpha-\beta\beta);$$

& en prenant les quarrés, notre équation prendra la forme ſuivante :

$$(Fx+G)^2=ff(bbxx-(\alpha+\beta)\,bbx-k^4),$$

ou bien celle-ci :

$$(F^2-f^2b^2)\,xx+(2FG+(\alpha+\alpha)\,f^2b^2)\,x+G^2+f^2k^4=0,$$

équation qui, ſi l'on met pour abrêger :

$$A=FF-ffbb;$$
$$B=2FG+(\alpha+\beta)\,ffbb;$$
$$C=GG+ffk^4;$$

donne le rayon du cercle cherché

$$x=-\frac{B\pm\sqrt{(BB-4AC)}}{2A}.$$

Corollaire I.

Suppoſons que les trois cercles donnés ſe touchent mutuellement, & nous aurons $\alpha+\beta=a$, $\beta+\gamma=b$, $\alpha+\gamma=c$; de là on tire les valeurs ſuivantes :

$$bb=16\,\alpha\beta;$$
$$k^4=0;$$
$$ff=\frac{4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta)^2};$$
$$g=\frac{\alpha(\alpha+\gamma)\cdot\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha+\beta};$$

F =

$$F = \frac{4\alpha\alpha(\beta-\gamma) + 4\beta\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha+\beta};$$
$$G = -4\alpha\beta\gamma;$$
$$A = 16\,[(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2 - 4\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)];$$
$$B = 32\,\alpha\beta\gamma(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma);$$
$$C = 16\,\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma;$$

d'où l'on déduit le radical

$$\sqrt{(BB-4AC)} = 64\,\alpha\beta\gamma\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$$

et par conſéquent le rayon du cercle qui touche les trois cercles donnés, ſera

$$x = \frac{-\alpha\beta\gamma}{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \pm 2\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}}.$$

Corollaire 2.

En ſuppoſant que les trois cercles donnés, qui ſe touchent mutuellement, ſoyent égaux, le triangle A B C ſera équilatéral, & nous ſavons d'avance que le rayon cherché ſera $= \alpha \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$. Or l'expreſſion du Corollaire précédent donne pour le cas préſent

$$x = \frac{-\alpha}{3 \pm 2\sqrt{3}} = -\frac{\alpha(3 \mp 2\sqrt{3})}{-3} = \alpha \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$$

comme il faut.

Corollaire 3.

Suppoſons que les trois cercles ſoyent égaux, mais qu'ils ne ſe touchent pas mutuellement, & en mettant $\gamma = \beta = \alpha$, nous aurons les valeurs ſuivantes :

$$bb = 4aa;$$
$$k^4 = aa(aa - 4\alpha\alpha);$$
$$g = \frac{cc + aa + bb}{2a};$$
$$F = 0;$$
$$G = \tfrac{1}{2}a(aa - bb - cc);$$

 A =

$$A = -4aaff;$$
$$B = 8\alpha aaff;$$
$$C = \tfrac{1}{4}aa(aa - bb - cc)^2 + aaff(aa - 4\alpha\alpha);$$

ce qui étant ſubſtitué, nous aurons

$$x = \alpha \mp \frac{\sqrt{(aa - bb - cc)^2 + .\,aaff}}{4f}$$

expreſſion qui, à cauſe de

$$ff = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4aa}$$

ſe reduit à celle-ci:

$$x = \alpha \mp \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}.$$

Ainſi, en déſignant par la lettre r le rayon du cercle circonſcrit au triangle A B C, le rayon du cercle qui touche les trois cercles donnés, ſera $x = \alpha \mp r$.

Corollaire 4.

Soyent les diſtances des trois cercles égaux égales entre-elles, c'eſt-à-dire $c = b = a$, il eſt évident que le triangle A B C ſera équilatéral & le rayon du cercle cherché $= \alpha \pm \frac{a}{\sqrt{r}}$. L'expreſſion du Corollaire précédent donne auſſi $x = \alpha \pm \frac{a}{\sqrt{r}}$.

Scholie.

Il eſt évident au reſte que, quoique nous ayons ſuppoſé tous les trois cercles donnés au dedans du cercle qui doit les toucher, ſi l'on veut qu'il y en ait un, deux, ou même tous les trois cercles donnés au dehors de celui qu'on cherche, on n'aura qu'à prendre négatif le rayon, ou les rayons, de ces cercles qui doivent tomber en dehors. Pour ce qui regarde les racines négatives de l'équation du ſecond degré & les autres explications que cette ſolution pourroit encore exiger, on les trouvera dans le Mémoire de M. Euler

(§. 6.

(§. 6 & 7.): il ſeroit ſuperflu de les répéter ici. Je crois également inutile de montrer l'accord de cette ſolution avec celle de M. Euler, ou avec les réſultats de la ſolution de M. Obéreit (*), cet accord étant évident par les Corollaires. Je paſſe donc à la ſeconde ſolution trigonométrique.

SECONDE SOLUTION.

Soyent toutes les dénominations comme dans la ſolution précédente, A, B, C les centres; α, β, γ les rayons; a, b, c les diſtances de trois cercles donnés, & O le centre du cercle cherché. De ce point O abaiſſons, ſur AC & BC, les perpendiculaires OP & OQ, & à cauſe de Tab. III. Fig. 2.

$$AO^2 - CO^2 = AP^2 - CP^2;$$

$$BO^2 - CO^2 = BQ^2 - CQ^2;$$

ſi nous nommons $CO = z$, $CP = p$, $CQ = q$, nous aurons $z = x - \gamma$, donc $x = z + \gamma$, partant $BO = z + \gamma - \beta$ & $AO = z + \gamma - \alpha$, $AP = c - p$ et $BQ = q - q$. Ces valeurs étant ſubſtituées, on aura

$$2z(\gamma - \alpha) + (\gamma - \alpha)^2 = cc - 2cp;$$

$$2z(\gamma - \beta) + (\gamma - \beta)^2 = bb - 2bq;$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{cc - (\gamma - \alpha)^2 - 2z(\gamma - \alpha)}{2c};$$

$$q = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2 - 2z(\gamma - \beta)}{2b}.$$

Conſidérons maintenant les triangles COP & COQ; ils nous fourniſſent $\text{coſ.}\, ACO = \frac{p}{z}$ & $\text{coſ.}\, BCO = \frac{q}{z}$. De là on déduit

$$\text{coſ.}\, C = \text{coſ.}(ACO + BCO) = \frac{pq}{zz} - \sqrt{1 - \frac{pp}{zz}} \times \sqrt{1 - \frac{qq}{zz}},$$

O 3 d'où

(*) B. Lamberts gel. Briefwechſel Vter Th. S. 256.

d'où l'on tire facilement cette équation :

$$\text{ſin. } C^2 = \frac{pp}{zz} + \frac{qq}{zz} - \frac{2pq}{zz}\,\text{coſ. } C.$$

Tab. III. Fig. 3. Dans un cercle dont le diamètre $= 1$, ſoit l'arc $RVS = 2C$, & l'on aura la corde $RS = \text{ſin. } C$; & il eſt clair qu'en tirant les cordes RT & ST, quel que ſoit l'angle SRT, on aura $RT = \frac{p}{z}$ & $ST = \frac{q}{z}$. Soit l'angle $SRT = \Phi$, & il y a $RST = 180° - (C + \Phi)$, donc $ST = \text{ſin. } \Phi$ & $RT = \text{ſin. } (C + \Phi)$. Nous aurons donc

$$RT = \frac{p}{z} = \text{ſin. } (C + \Phi) = \frac{cc - (\gamma - \alpha)^2}{2cz} - \frac{(\gamma - \alpha)}{c};$$

$$ST = \frac{q}{z} = \text{ſin. } \Phi = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{2bz} - \frac{(\gamma - \beta)}{b};$$

d'où l'on tire ces deux équations :

$$\text{ſin. } (C + \Phi) + \frac{\gamma - \alpha}{c} = \frac{cc - (\gamma - \alpha)^2}{2cz};$$

$$\text{ſin. } \Phi + \frac{\gamma - \beta}{b} = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{2bz};$$

desquelles on peut former la proportion ſuivante :

$$\text{ſin. } (C + \Phi) + \frac{\gamma - \alpha}{c} : \text{ſin. } \Phi + \frac{\gamma - \beta}{b} = \frac{cc - (\gamma - \alpha)^2}{c} : \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{b}.$$

ou bien, en mettant pour abrêger

$$\frac{cc - (\gamma - \alpha)^2}{c} = f \ \& \ \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{b} = g,$$

cette proportion devient

$$\text{ſin. } (C + \Phi) + \frac{\gamma - \alpha}{c} : \text{ſin. } \Phi + \frac{\gamma - \beta}{b} = f : g.$$

ce qui mene à cette équation pour l'angle Φ :

$$g\,\text{ſin. } (C + \Phi) - f\,\text{ſin. } \Phi = \frac{f(\gamma - \beta)}{b} - \frac{g(\gamma - \alpha)}{c} = h.$$

Connoiſſant donc l'angle Φ, on aura

$$2\,CO = 2z = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{\gamma - \beta + b\,\text{ſin. } \Phi}.$$

Conſtruction.

Fig. 4 & 5. Soyent A, B, C les trois centres donnés (celui du plus grand cercle en C). Prolongez CA & CB jusqu'en α & β, de façon

façon que $A\alpha = \gamma - \alpha$ & $B\beta = \gamma - \beta$. Par C tirez la droite $\gamma\delta$ & faites $C\gamma = CA$ & $C\delta = CB$. Portez-y les intervalles $C\zeta = c - (\gamma - \alpha)$ & $C\eta = b - (\gamma - \beta)$. Tirez ζD & ηE parallèles aux $\gamma\alpha$ & $\delta\beta$. Cherchez deux lignes QR & SV qui ſoyent quatrièmes proportionnelles, l'une à BC, CD & $B\beta$; l'autre à AC, CE & $A\alpha$. Du point D pour centre, avec le rayon DE, décrivez un arc de cercle, & après avoir érigé en D ſur CD la perpendiculaire DF égale à la différence de QR & SV, tirez par F, parallèle à CD, la droite $G\Gamma$, qui coupe l'arc en G & Γ. Tirez DG & DE, & prolongez-les jusqu'en H & I, de façon que $DH = DI = BC$. De H tirez HK perpendiculaire à DI qu'elle coupe en P, & faites $PK = B\beta$ & $HM = C\beta$. Du point H tirez à volonté la droite $HL = C\eta$. Joignez K, L, & par M tirez MN parallèle à KL, vous aurez $HN = 2z$, & le rayon cherché ſera $x = z + \gamma$. Des points C & A pour centres, avec les rayons $CO = z$ & $AO = z + (\gamma - \alpha)$, tracez des arcs de cercle, leur interſection O donnera le centre cherché.

Démonſtration.

Comme $\left\{\begin{matrix} \Delta C\alpha\gamma \sim \Delta CD\zeta \\ \Delta C\beta\delta \sim \Delta CE\eta \end{matrix}\right\}$ on aura

$$\left.\begin{matrix} C\gamma : C\alpha = C\zeta : CD \\ C\delta : C\beta = C\eta : CE \end{matrix}\right\} \text{d'où l'on tire}$$

$$CD = \frac{C\alpha \cdot C\zeta}{C\gamma} = \frac{cc - (\gamma - \alpha)^2}{c} = f;$$

$$CE = \frac{C\beta \cdot C\eta}{C\delta} = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{b} = g.$$

Puis $\Delta HKL \sim \Delta HMN$, partant $HN = \frac{HL \cdot HM}{HK}$. Or $HK = PK + HP$ & $HP = DH \,\text{ſin.}\, HDP = b \,\text{ſin.}\, GDE$, $HL = b - (\gamma - \beta)$ & $HM = b + \gamma - \beta$, donc

$$HN = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{\gamma - \beta + b \,\text{ſin.}\, GDE}.$$

En-

Enſuite il eſt évident que

$$\text{ſin. } CDG = \frac{DF}{DG} = \frac{DF}{DE} = \text{ſin. } (CDE - GDE),$$

$$DF = DE \text{ ſin. } CDE \text{ coſ. } GDE - DE \text{ ſin. } GDE \text{ coſ. } CDE.$$

Mais le triangle C D E nous fournit

$$\text{ſin. } CDE = \frac{CE \text{ ſin. } C}{DE} \text{ \& coſ. } CDE = \frac{CD - CE \text{ coſ. } C}{DE},$$

(à cauſe de $DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2\, CD \,.\, CE \text{ coſ. } C$), ce qui étant ſubſtitué, on aura

$$DF = CE \text{ ſin. } (C + GDE) - CD \text{ ſin. } GDE.$$

Or nous ſavons que

$$QR = \frac{CD \,.\, B\beta}{BC} = \frac{f(\gamma - \beta)}{b};$$

$$SV = \frac{CE \,.\, A\alpha}{AC} = \frac{g(\gamma - \alpha)}{c}; \text{ donc}$$

$$DF = QR - SV = \frac{f(\gamma - \beta)}{b} - \frac{g(\gamma - \alpha)}{c} = h$$

& partant

$$h = g \text{ ſin. } (C + GDE) - f \text{ ſin. } GDE.$$

Mais nous avions trouvé ci-deſſus

$$h = g \text{ ſin. } (C + \Phi) - f \text{ ſin. } \Phi;$$

on aura donc l'angle $GDE = \Phi$, & partant

$$HN = \frac{bb - (\gamma - \beta)^2}{\gamma - \beta + b \text{ ſin. } \Phi} = 2\, CO.$$

Scholie 1.

Si l'on tire la droite D Γ, & qu'on fait avec cette ligne ce que nous venons de faire avec D G, on obtient pour z une autre valeur : c'eſt la ſeconde ſolution qu'exige la nature du Problème & l'équation du ſecond degré, à laquelle nous a conduit la ſolution précédente.

Scholie 2.

Il me ſemble que cette ſeconde ſolution laiſſe peu à déſirer : elle eſt courte & facile ; & la conſtruction qui en a été

été déduite, joint à toute l'élégance d'une conſtruction purement géométrique, l'avantage de pouvoir être appliquée avec une égale facilité à tous les cas poſſibles, ſoit qu'un, deux, ou tous les trois cercles duſſent être hors de celui qu'on cherche. On n'a qu'à changer le ſigne du rayon du cercle qui doit être dehors & prendre, ſi r eſt négatif, $A\alpha$ & $B\beta$ de A & B vers C. C'eſt pour cet effet que j'y ai laiſſé les dénominations algébriques, auxquelles il eut été facile de ſubſtituer des lignes. Toutefois il n'y auroit donc ici que deux cas à diſtinguer: ſavoir r poſitif & r négatif. Viéte donne quatre conſtructions différentes pour les quatre cas qu'il diſtingue: chacune ſuppoſe, comme la conſtruction de Newton dans l'Arithmétique univerſelle, la déſcription d'un cercle qui touche deux cercles donnés & qui paſſe par un point donné, Problème qui précède dans Apollonius Gallus & dans l'Arithmétique univerſelle le Problème que nous venons de réſoudre. C'eſt à cette circonſtance qu'il faut attribuer la frappante ſimplicité de leur conſtruction. Feu. M. Teſſanek (*), dans une lettre addreſſée à M. Jean Bernoulli, préfère à ces conſtructions celle qui a été faite par Newton moyennant l'interſection de deux Hyperboles, à l'occaſion d'un Problème analogue à celui des trois cercles (**). Viéte avoit déjà eu un démélé avec Adrianus Romanus, à l'occaſion d'une pareille conſtruction, que le dernier en avoit donnée (***); et effectivement, le Problème étant plan, il eſt contre la méthode, de ſe ſervir des Sections coniques pour le réſoudre.

(*) Lamberts deutſcher gelehrter Briefwechſel. Tom. V. pag. 252.

(**) Principia Philoſophiae naturalis Tom. I. pag. 96. Editio Prag.

(***) Franciſci Vietae Opera varia, pag. 325. Editio Schottenii. 1646.

SVMMATIO SERIEI

$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + 7^n - 8^n +$ etc.

Denotante *n* numerum quemcunque integrum.

Auctore
STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. die 5 *Octob.* 1789.

Inſtitutionum Calculi Differentialis in Capite VII magnus *Eulerus* exhibet ſummas noſtrae ſeriei pro variis valoribus ipſius n, aſt ex profundis demum conſiderationibus de ſummatione progreſſionum per ſeries infinitas ſummas eiusmodi ſerierum tanquam conſectaria elicit. Quamobrem conſtitui hic exponere qua ratione methodo magis directa ad ſummam eiusmodi ſerierum pro variis valoribus ipſius n peruenire liceat. Initium faciam a caſu ſimpliciſſimo, ac poſtmodum ad reliquos progrediar.

Caſus I. Sit $n = 1$, et ſeries, cuius ſumma quaerenda eſt, habebitur

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \text{etc.}$$

Ponatur

$$s = 1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \text{etc.}$$

ex qua propoſita reſultat, ſi ponatur $x = 1$. Ducatur iam ſeries ficta in ∂x, et prodibit

$s \partial x$

$$s\partial x = \partial x - 2x\partial x + 3xx\partial x - 4x^3\partial x + 5x^4\partial x - 6x^5\partial x + \text{etc.}$$

vnde

$$\int s\partial x = x - xx + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 - \text{etc.}$$

Eſt autem

$$x - xx + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \text{etc.} = \frac{x}{1+x},$$

Hinc $s\partial x = \frac{\partial x}{(1+x)^2}$ et $s = \frac{1}{(1+x)^2}$, ac poſito $x = 1$ prodit $s = \frac{1}{4}$; ſcilicet

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \text{etc.} = \frac{1}{4}.$$

Caſus. II. Ponatur $n = 2$, et habebitur ſeries ſummanda

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \text{etc.}$$

Sit vt ſupra

$$s'' = 1 - 2^2x + 3^2xx - 4^2x^3 + 5^2x^4 - 6^2x^5 + 7^2x^6 - \text{etc.}$$

multiplicetur vtrinque in ∂x, et ſumto integrali obtinebitur:

$$\int s''\partial x = x - 2x + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 + 7x^7 - \text{etc.}$$

ſiue

$$\int s''\partial x = x(1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \text{etc.})$$

Eſt vero ex caſu praecedente

$$1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - \text{etc.} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Hinc $\int s''\partial x = \frac{x}{(1+x)^2}$, atque $s'' = \frac{1-x}{(1+x)^3}$, quamobrem poſito $x = 1$ prodibit

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \text{etc.} = 0.$$

Caſus III. Statuatur porro $n = 3$, et ſeries ſummenda erit

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + 7^3 - \text{etc.}$$

fiat vt ſupra

$$s''' = 1 - 2^3x + 3^3xx - 4^3x^3 + 5^3x^4 - 6^3x^5 + 7^3x^6 - \text{etc.}$$

vnde

vnde

$$s'''\partial x = \partial x - 2^3 x\partial x + 3^3 xx\partial x - 4^3 x^3\partial x + 5^3 x^4\partial x - \text{etc.}$$

ac

$$\int s'''\partial x = x - 2^2 xx + 3^2 x^3 - 4^2 x^4 + 5^2 x^5 - 6^2 x^6 - \text{etc.}$$

Eſt vero ex caſu praecedente

$$x(1 - 2^2 x + 3^2 xx - 4^2 x^3 + 5^2 x^4 - 6^2 x^5 + \text{etc.}) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

Hinc $\int s'''\partial x = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ atque $s''' = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}$. Poſito vt ante $x = 1$, ſumma ſeriei quaeſitae prodit:

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^2 + 7^3 - \text{etc.} = -\tfrac{1}{8}.$$

Pari modo poſito $n = 4$ reperitur $s'''' = \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5}$, ac poſito $x = 1$ fit

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + 7^4 - \text{etc.} = 0.$$

Ex allatis iam ſummationibus perſpicere licet ſummam ſeriei ordinis $n+1$, quam pono $= S$, ſemper ita pendere a ſumma ſeriei ordinis praecedentis n, quae ſit $= s$, vt ſit $\int S\partial x = sx$, hinc $S = s + \frac{x\partial s}{\partial x}$. Data ſcilicet expreſſione, ex qua reſultat ſeries ordinis n, facile reperitur expreſſio, quae praebet ſeriem ordinis ſequentis, ita vt repetendo eiusmodi operationem, ſummatio ſerierum quousque libuerit, continuari poterit. Verum vt res generaliter abſoluatur, ad normam praecedentium expreſſionum pro ſerie ordinis n ponatur

$$s = \frac{1 - Ax + Bxx - Cx^3 + Dx^4 - Ex^5 + Fx^6 - - - + x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}.$$

Hinc differentiando habebitur:

$$\frac{x\partial s}{\partial x} = \frac{-Ax + 2Bxx - 3Cx^3 + 4Dx^4 - 5Ex^5 + 6Fx^5 - - - + (n-1)x^{n-1}}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\frac{-(n+1)(x - Axx + Bx^3 - Cx^4 + Dx^5 - Ex^6 + Fx^7 - - - + x^{n+1}}{(1+x)^{n+2}},$$

redu-

reducendo ad eundem denominatorem et ſecundum poteſtates ipſius x ordinando prodibit

$$S = s + x\partial s =$$

$$\frac{\begin{array}{l} 1 - Ax + Bxx - Cx^3 + Dx^4 - Ex^5 + Fx^6 - - \pm x^{n-1} \\ + 1 - A + B - C + D - E - - - - \pm x^n \\ - A + 2B - 3C + 4D - 5E + 6F - - \pm(n-1)x^{n-1} \\ - A + 2B - 3C + 4D - 5E - - - - \pm(n-1)x^n \\ -(n+1)+(n+1)A-(n+1)B+(n+1)C-(n+1)D+(n+1)E - - - - \mp(n+1)x^n \end{array}}{(1+x)^{n+2}}$$

ſiue colligendo terminos homologos oritur:

$$S = \frac{1-(n+2A)x+[(n-1)A+3B]xx-[(n-2)B+4C]x^3 + [(n-3)C+5D]x^4-[(n-4)D+6E]x^5+[(n-5)E+7F]x^6 - \text{etc.}}{(1+x)^n}$$

Vt haec exemplo illuſtrentur, ſit iam reperiunda ſumma ſeriei ordinis quinti, ſiue ſeriei

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 7^5 + 8^5 - \text{etc.}$$

id circo ſtatui debet $n = 4$, $A = 11$, $B = 11$, $C = 1$, D vero ac omnes reliqui coëfficientes erunt nihilo aequales: his valoribus ſubſtitutis prodibit

$$s^{V} = \frac{1 - 26x + 66xx - 26x^3 + x^4}{(1+x)^6}$$

et poſito $x = 1$, habebitur

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + 7^5 - \text{etc.} = \tfrac{1}{4}.$$

Similem in modum vlterius ponendo $n = 5$, et valoribus coëfficientium ex expreſſione modo inuenta deſumendis reſultabit

$$s^{VI} = \frac{1 - 57x + 302xx - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7}, \text{ ac}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 7^6 + 8^6 - \text{etc.} = 0,$$

 poſito

poſito $n = 6$, fit

$$s^{VII} = \frac{1 - 120x + 1191xx - 2416x^3 + 1191x^4 - 120x^5 + x^6}{(1+x)^8}, \text{ ac}$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + 7^7 - 8^7 + \text{etc.} = -\frac{272}{2^8} = -1\tfrac{1}{16}$$

poſito $n = 7$, prodit

$$s^{VIII} = \frac{1 - 247x + 4293xx - 15619x^3 + 15619x^4 - 4293x^5 + 247x^6 - x^7}{(1+x)^8},$$

atque

$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + 7^8 - 8^8 + \text{etc.} = 0.$$

Hinc patet, quotieſcunque n denotat numerum parem, toties ſummam ſeriei nihilo aequari; ſeries vero poteſtatum imparium donari ſumma a nihilo diuerſa.

Expreſſiones, ex quibus ſeries noſtrae reſultant pro variis valoribus ipſius n, iam reſoluantur in fractiones partiales, et obtinebitur:

Caſu

$$n = 1,\ s = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$n = 2,\ s'' = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$n = 3,\ s''' = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{6}{(1+x)^3} + \frac{6}{(1+x)^4}$$

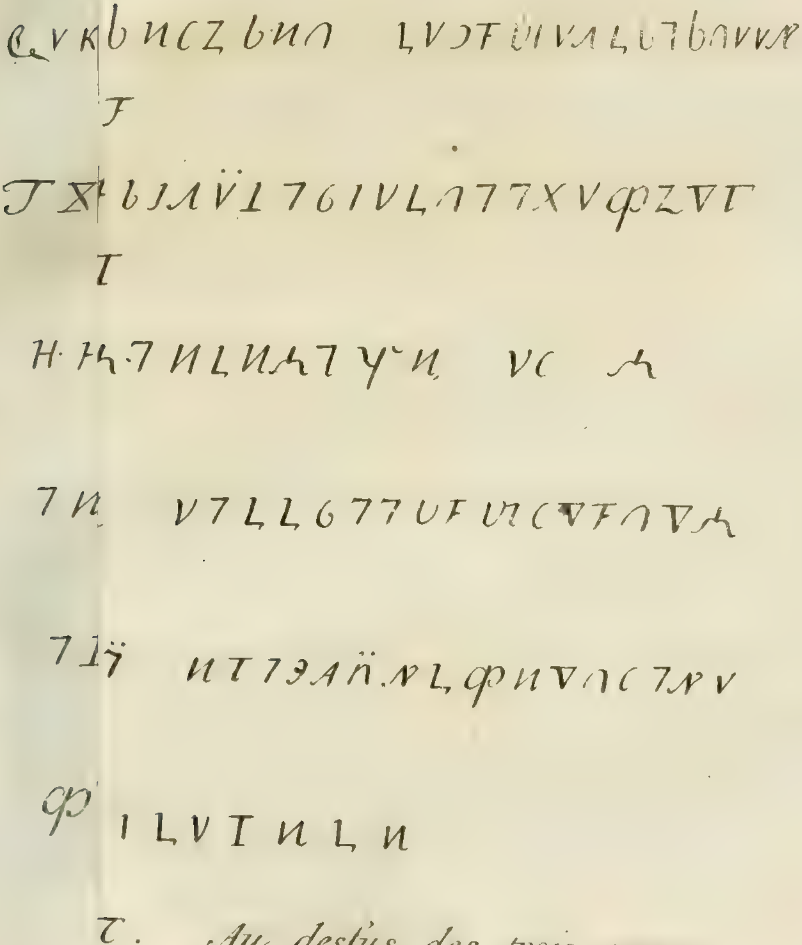
$$n = 4,\ s^{IV} = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{14}{(1+x)^3} - \frac{36}{(1+x)^4} + \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$n = 5,\ s^{V} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{30}{(1+x)^3} + \frac{150}{(1+x)^4} - \frac{240}{(1+x)^5} + \frac{120}{(1+x)^6}$$

$$n = 6,\ s^{VI} = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{62}{(1+x)^3} - \frac{540}{(1+x)^4} + \frac{1560}{(1+x)^5} - \frac{1800}{(1+x)^6} + \frac{720}{(1+x)^7},$$

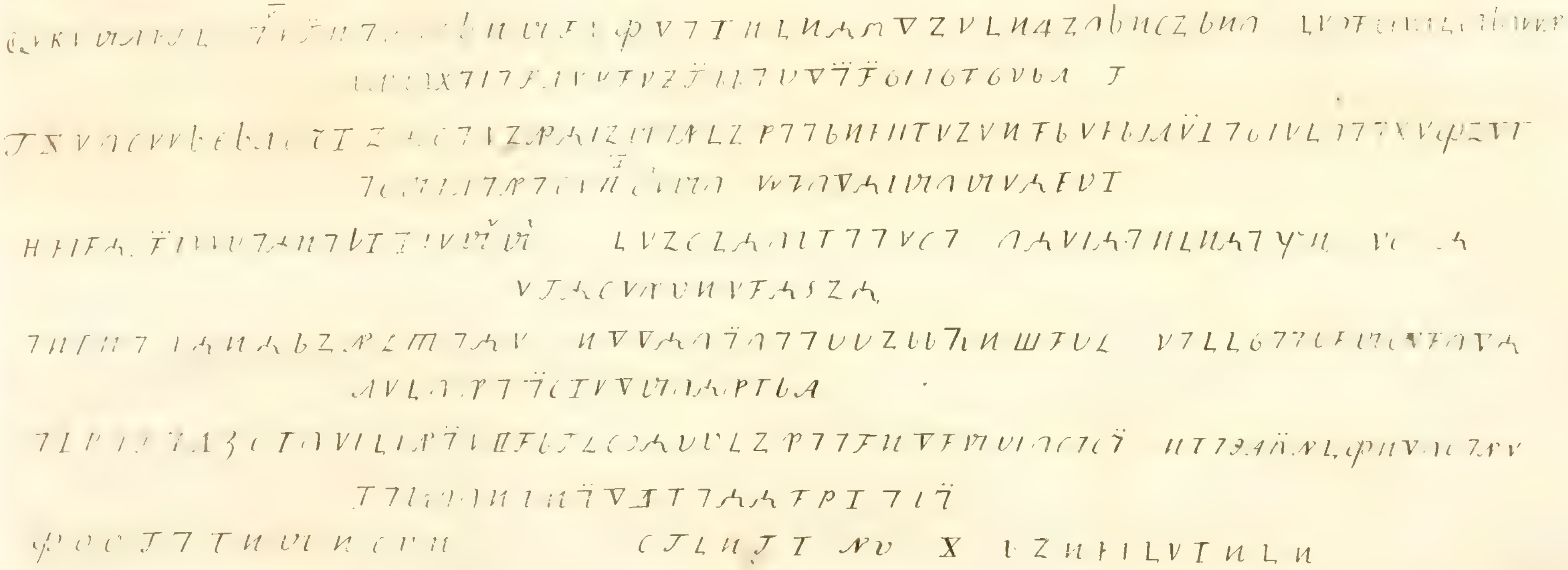
vbi quilibet numerator 1560 oritur, ſi ſumma binorum ſuperiorum $240 + 150 = 390$ multiplicetur per exponentem denominatoris, qui hic eſt 5, vnitate multatum, vltimus vero numerator 720, quia illi nullus terminus reſpondet in ſumma ſuperioris ſeriei, reperitur, ſi vltimus tantum ſuperior numerator ducatur in exponentem deminatoris $120 \times 6 = 720$. Servata

Insd' Eglise de St. Etienne de Perme
rensk.



Au desſus des trois anges

Inſcription Syrainique qu'on lit au deſſus d'une image de la Sainte Trinité, placée à l'Egliſe de St. Etienne de Perme dans la Paroiſſe de Woszhemsk' au Cercle de Yarensk.

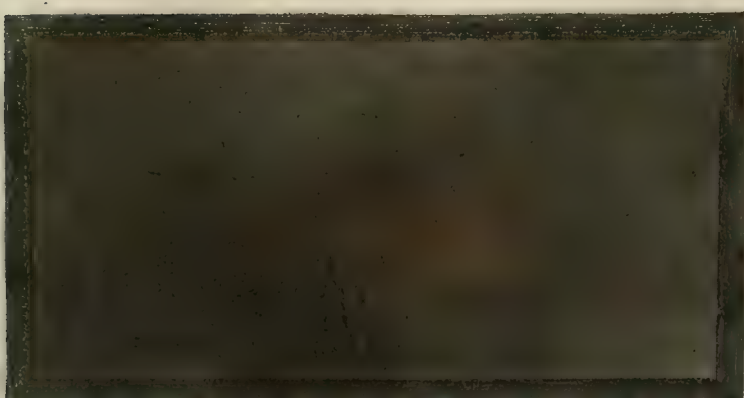


Au deſſus de l'image d'Abraham est écrit ТИVТ̈VI. *Au deſſus de Sara* LТVVТ. *Au deſſus des trois anges du premier* 7Z,7. *du second* Ӓ7. *du troisieme* 3ꜰϞТɔ۷

Tab. B.

Histoire de l'Académie Imp: des Sciences pour l'année 1783









vata hac lege facile erit fractiones partiales producere quousque libuerit, et ſummae ſerierum hoc modo commodius de tegi poſſe videntur.

Inanem operam facturus eſſem, ſi ſummationes has vlterius producere vellem; minime tamen praetereundum eſſe videtur ſimilem in modum ſeries poteſtatum numerorum imporium alternis ſignis affectarum ſummari poſſe. Sit ſeries ſummenda in genere

$$1 - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{etc.}$$

in qua, ſi ponatur $n = 1$, prodibit ſeries, cuius ſumma quaerenda eſt

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - \text{etc.}$$

Statuatur:

$$s = 1 - 3xx + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10} + \text{etc.}$$

Ducendo in ∂x et ſumendo integrali habebimus:

$$\int s\,\partial x = x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + \text{etc.}$$

ſiue

$$\int s\,\partial x = x(1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \text{etc.}) = \frac{x}{1+xx}.$$

Differentiando igitur et per ∂x diuidendo reperitur $s = \frac{1-xx}{(1+xx)^2}$, ac poſito $x = 1$, ſumma ſeriei quaeſitae prodit $= 0$.

Caſus II. quo eſt $n = 2$ et ſeries ſummanda

$$1 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + \text{etc.}$$

Ponamus

$$s'' = 1 - 3^2 xx + 5^2 x^4 - 7^2 x^5 + 9^2 x^8 - 11^2 x^{10} + \text{etc.}$$

Hinc

$$s''\partial x = \partial x - 3^2 xx\partial x + 5^2 x^4 \partial x - 7^2 x^6 \partial x + 9^2 x^8 \partial x - \text{etc.}$$

ac

$$\int s''\partial x = x(1 - 3xx + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10} + \text{etc.})$$

Eſt

Eſt vero ex caſu praecedente

$$1 - 3xx + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8 - 11x^{10} + \text{etc.} = \frac{1 - xx}{(1 + xx)^2},$$

vnde

$$\int s'' \partial x = \frac{x(1 - xx)}{(1 + xx)^3} \text{ et } s'' = \frac{1 - 6xx + x^4}{(1 + xx)^3}.$$

Quamobrem poſito $x = 1$ ſumma ſeriei quaeſitae prodit $= -\frac{1}{2}$.

Quodſi vlterius ſequentes caſus euoluantur, mox patebit ſummam ſeriei S ordinis $n + 1$, ita pendere a ſumma ordinis praecedentis s, vt ſit $\int S \partial x = s x$ et $S = s + \frac{x \partial s}{x \partial}$, id circo poſito

$$s = \frac{1 - Axx + Bx^4 - Cx^6 + Dx^8 - Ex^{10} + Fx^{12} - \text{etc.}}{(1 + xx)^{n+2}}$$

et computo abſoluto prodibit tandem

$$S = \frac{1 - [(2n+1) + 3A]xx + [(2n-1)A + 5B]x^4 - [(2n-3)B + 7C]x^6 + [(2n-5)C + 9D]x^8 - [(2n-7)D + 11E]x^{10} + [(2n+9)E + 13F]x^{12} - \text{etc.}}{(1 + xx)^{n+2}}$$

vbi lex, quam tenent coëfficientes poteſtatum ipſius x facile perſpicitur.

Quo igitur reperiatur ſumma ſeriei pro caſu $n + 1 = 3$, poni debet $n = 2$, $A = 6$, $B = 1$, tum vero C ac omnes reliqui coëfficientes ſtatui debent nihilo aequales; ſubſtitutis his valoribus in expreſſione generali prodibit:

$$s''' = \frac{1 - 23xx + 23x^4 - x^6}{(1 + xx)^4}$$

et poſito $x = 1$ fit

$$1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - 11^3 + 13^3 - \text{etc.} = 0.$$

Pari modo vlterius procedendo reperitur

$s^{VI} =$

$$s^{IV} = \frac{1 - 76\,xx + 230\,x^4 - 76\,x^6 + x^8}{(1 + xx)^5}$$

et poſito $x = 1$

$$1 - 3^4 + 5^4 - 7^4 + 9^4 - 11^4 + \text{etc.} = \frac{80}{5^2} = 2\tfrac{1}{2}$$

$$s^V = 1 - 237\,xx + 1682\,x^4 - 1682\,x^6 + 237\,x^8 - x^{10},$$

poſito $x = 1$ prodit

$$1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - 11^5 + \text{etc.} = 0.$$

$$s^{VI} = \frac{1 - 722\,xx + 10543\,x^4 - 23548\,x^6 + 10543\,x^8 - 722\,x^{10} + x^{12}}{(1 + xx)^7},$$

et ponendo $x = 1.$

$$1 - 3^6 + 5^6 - 7^6 + 9^6 - 11^6 + \text{etc.} = -\frac{3904}{2^7} = -30\tfrac{1}{2}.$$

Quodſi fractiones, quae euolutione ſua praebent ſeries ſupra numeratas, reſoluantur vt ſupra in fractiones partiales, reſultabit

Caſu

$$n = 1,\ s = -\frac{1}{1 + xx} + \frac{2}{(1 + xx)^2}$$

$$n = 2,\ s'' = -\frac{1}{1 + xx} - \frac{8}{(1 + xx)^2} + \frac{8}{(1 + xx)^3}$$

$$n = 3,\ s''' = -\frac{1}{1 + xx} + \frac{26}{(1 + xx)^2} - \frac{72}{(1 + xx)^3} + \frac{48}{(1 + xx)^4}$$

$$n = 4,\ s^{IV} = -\frac{1}{1 + xx} - \frac{80}{(1 + xx)^2} + \frac{464}{(1 + xx)^3} - \frac{768}{(1 + xx)^4} + \frac{384}{(1 + xx)^5}$$

$$n = 5,\ s^V = -\frac{1}{1 + xx} + \frac{242}{(1 + xx)^2} - \frac{2640}{(1 + xx)^3} + \frac{8160}{(1 + xx)^4} - \frac{9600}{(1 + xx)^5} + \frac{3840}{(1 + xx)^6}$$

Vbi quilibet numerator 2640 pendet a duobus ſuperioribus 464 et 80 ita, vt ſi primus eorum 464 ducatur in ſummam vtriusque exponentium in denominatoribus contentorum ſc. $3 + 2$, ſecundus in duplam poteſtatem denominatoris ſcilicet 4, ſumma productorum dabit numeratorum 2640. Sic pro caſu $n = 6$ erit

$$ſ^{VI} = \frac{1}{1+xx} - \frac{728}{(1+xx)^2} + \frac{14168}{(1+xx)^3} - \frac{72960}{(1+xx)^4}$$
$$+ \frac{151680}{(1+xx)^5} - \frac{138240}{(1+xx)^6} + \frac{46080}{(1+xx)^7},$$

et poſito $x = 1$ prodit vt ſupra

$$ſ^{VI} = -\frac{3904}{2^7} = -30\tfrac{1}{2}.$$

Hac lege obſeruata fractiones partiales continuari, et poſito demum $x = 1$ ſummationes quaeſitae erui poterunt. Series ergo poteſtatum numerorum imparium alternis ſignis affectarum, toties ſunt nihilo aequales, quoties n denotat numerum imparem, cum contra denotante n numero pari donentur ſumma aliqua reali.

Circa numeratores fractionum partialium id in genere notari conuenit, quod ſumma affirmatiuorum conſtanter ſuperet vnitate ſummam negativorum.

DE

DE PROIECTIONE SPHAEROIDIS ELLIPTICAE GEOGRAPHICA.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Diſſertatio Secunda.

Proiectio ſtereographica horizontalis ſeu obliqua.

Conuent. exhib. die 5 Mart. 1789.

§. 1.

In utraque proiectione, quam hucusque conſideravi, polari nempe et aequatorea, differentia inter proiectionem ſphaericam et ellipticam tam parva fuit reperta, ut prorſus propemodum poſſet negligi. Nihilo tamen minus iſtas proiectiones omittere nolui, cum non raro ſoleat parvae cuiuspiam ſuperficiei polo vel aequatori propinquae proiectio adornari polaris vel aequatorialis, quo caſu radius *a* ideoque et correctio iſta e figura telluris elliptica oriunda multo maior erit. Neque aliter ſe habet proiectio *horizontalis*, quae ſi totum hemiſphaerium repraeſentet, haec disquiſitio tantum non mera erit ſpeculatio. Cum autem haec proiectio inprimis adhiberi ſoleat

in mappis ſpecialibus, radius proiectionis tunc tantus ſit, ut, quae ex figura telluris non ſphaerica originem trahit, correctio hic non amplius negligi poſſe videatur. Quovis certe caſu disquiſitio haud inutilis erit, quae docebit, quatenus ea correctio, ſalva exactitudine deſiderata omitti poſſit in proiectione generali ſeu horizontali.

Praecipua eius elementa ſunt proiectiones Aequatoris, Parallelorum, Meridianorum et utriusque Poli. Quamvis enim eae non omnes intra mappae limites cadant, tamen ſunt fundamentum, cui mappae diviſio immo integra compoſitio ſuperſtruitur. Quia vero puncta in telluris ſuperficie per latitudinem et longitudinem determinari ſolent, calculus autem noſter lineas C N, N M, C M, et angulum ad centrum B C M (Diſſ. I. Fig. 1.) continet, tabula annexa pro ſingulis latitudinis gradibus indicat angulum centri B C M, radium Paralleli N M, diſtantiam Paralleli ab Aequatore C N, et cuiuscunque puncti M in Parallelo a centro diſtantiam C M. Quae quatuor elementa characteribus β', y, x, z ſunt notata, ac tria poſteriora in partibus radii a expreſſa. Per calculum haec elementa ſequentibus inveniri poſſunt formulis. Poſita latitudine puncti $M = \beta$, eſt, ut ſupra vidimus (Diſſert. I. §. 3.),

$$N M = a y = \frac{m a}{\sqrt{(m^2 + tang^2. \beta)}};$$

$$C N = a x = \frac{a \sqrt{(1 - y y)}}{m};$$

$$C M = a z = a \sqrt{(x x + y y)}; \text{ et}$$

$$tang. B C M = tang. \beta' = \frac{x}{y}.$$

Iisdem denominationibus in poſterum ſemper utemur, ut itaque, data latitudine β, tanquam cognitae aſſumi poſſint β', x, y, z.

Tab. IV. §. 2. Sit itaque (Fig. 10.) A R Aequator, P, p poli centrum C, oculus in O, $q\,n$ communis interſectio plani tabulae

bulae et Meridiani oculi, Zenith vel centrum mappae conſtruendae in Z, eiusque latitudo $= \beta$, eritque $ACZ = \beta'$, $CB = ax$, $BZ = ay$, $CZ = az$. Iam primum quidem patet, punctum Z proiici in C, et Meridianum loci Z in rectam Qq, polos in Q et q. Eſt autem

$$PCO = PCR + RCO = 90^\circ + \beta', \text{ unde}$$

$$\text{tang. } POC = \frac{cp \sin.(90^\circ + \beta')}{co - cp \cos.(90^\circ + \beta')} = \frac{b \cos.\beta'}{az + b \sin.\beta'} = \frac{\cos.\beta'}{mz + \sin.\beta'},$$

unde

$$CQ = CO \text{ tang. } POC = \frac{az \cos.\beta'}{mz + \sin.\beta'};$$

ſimili modo invenitur

$$Cq = CO \text{ tang. } pOC = \frac{az \cos.\beta'}{mz - \sin.\beta'}, \text{ quia}$$

$$pCO = ZCP = 90^\circ - \beta', \text{ et}$$

$$\text{tang. } pOC = \frac{cp \sin. pco}{co - cp \cos. pco} = \frac{b \cos.\beta'}{az - b \sin.\beta'}.$$

In proiectione ſphaerica eſt $CQ = \frac{a \cos.\beta}{1 + \sin.\beta}$, in quam formam noſtra abit, ſi $\beta' = \beta$, $m = 1$ et $z = 1$.

Priusquam ulterius progrediamur, inquiramus, quanta utriusque valoris differentia fieri poſſit. Quem in finem ponatur $\frac{a \cos.\beta}{1 + \sin.\beta} = A$, et $\frac{az \cos.\beta'}{mz + \sin.\beta'} = B$, atque differentia $A - B$ erit maxima, ſi $\partial A = \partial B$. Poſſumus autem hic literam z ſumere conſtantem, quia creſcente angulo β a nihilo ad 90°, z ab 1 usque ad $\frac{1}{m}$ modo decreſcit. Erit itaque

$$\frac{-a \partial \beta}{1 + \sin.\beta} = \partial A = \partial B = \frac{-az \partial \beta' (1 + mz \sin.\beta')}{m^2 z^2 + 2mz \sin.\beta' + \sin^2.\beta'}.$$

Poſito $mz = 1 + \omega$ (ubi ſemper $\omega \lesssim \mu$, vel $\omega \lesssim m - 1$, quia $z \lesssim 1$), fiet denominator

$$= 1 + 2\omega + 2mz \sin.\beta' + m^2 z^2 \sin.^2\beta' - 2\omega \sin.^2\beta'$$

$$= (1 + mz \sin.\beta')^2 + 2\omega \cos.^2\beta',$$

unde, cum hic non ſumma requiratur exactitudo, ponere licet

cet $\partial B = \frac{-a z \partial \beta'}{1 + m z \, \text{ſin.} \, \beta'}$. Sine ingente errore quoque ſtatui poteſt $\partial \beta' = \partial \beta$, vnde erit $z (1 + \text{ſin.} \, \beta) = 1 + m z \, \text{ſin.} \, \beta'$, et $z = \frac{1}{1 + \text{ſin.} \, \beta - m \, \text{ſin.} \, \beta'}$. Eſt autem tang. $\beta = \frac{m m x}{y}$, et tang. $\beta' = \frac{x}{y}$, ergo tang. $\beta' = \frac{\text{tang.} \, \beta}{m m}$, et $y y = \frac{1}{1 + m^2 \, \text{tang.}^2 \, \beta'}$, unde reperitur

$$z z = \frac{y y}{\text{coſ.}^2 \, \beta'} = \frac{1}{\text{coſ.}^2 \, \beta' + m^2 \, \text{ſin.}^2 \, \beta'} .$$

Qui valor cum priore pro z invento comparatus praebet:

$$\text{ſin.}^2 \beta' + \text{ſin.} \, \beta - 2 m \, \text{ſin.} \, \beta' (1 + \text{ſin.} \, \beta) + 2 \, \text{ſin.} \, \beta = 0.$$

Hinc iam patet, unam radicem eſſe $\beta' = 0 = \beta$, unde quia tang. $\beta' = \frac{\text{tang.} \, \beta}{m m}$, vel ſin. $\beta' = \frac{\text{ſin} \, \beta}{\sqrt{(m^4 - (m^4 - 1) \, \text{ſin.}^2 \, \beta)}}$, aequatio per ſin. β diviſa erit:

$$\text{ſin.} \, \beta \, [1 + m^4 - (m^4 - 1) \, \text{ſin.}^2 \, \beta] - 2 m (1 + \text{ſin.} \, \beta) \times$$
$$\times \sqrt{[m^4 - (m^4 - 1) \, \text{ſin.}^2 \, \beta]} + 2 \, [m^4 - (m^4 - 1) \, \text{ſin.}^2 \, \beta] = 0,$$

ſeu evoluta quantitate radicali et neglectis poteſtatibus ipſius μ altioribus,

$$\text{ſin.} \, \beta (1 + 2 \mu) - 2 \mu \, \text{ſin.}^2 \, \beta - m^3 + \frac{2 \mu}{m} \, \text{ſin.}^2 \, \beta$$
$$- m^3 \, \text{ſin.} \, \beta + \frac{2 \mu}{m} \, \text{ſin.}^3 \, \beta + m^4 - 4 \mu \, \text{ſin.}^2 \, \beta = 0 =$$

$$2 \mu^2 \, \text{ſin.}^3 \beta + 2 \mu (1 + 2 \mu) \, \text{ſin.}^2 \beta + m \mu \, \text{ſin.} \, \beta - m^4 \mu, \text{ vel}$$
$$2 \mu \, \text{ſin.}^3 \, \beta + 2 \quad (1 + 2 \mu) \, \text{ſin.}^2 \beta + m \quad \text{ſin.} \, \beta - m^4 = 0,$$

cui aequationi proxime ſatisfacit ſin. $\beta = 0,5033$, ſeu $\beta = 30° \, 13'$, unde ex tabula reperitur $\beta' = 30°$ et $z = 0,9989217$; quod praebet $B = 0,5754667 \, . \, a$, $A = 0,574832 \, . \, a$, et $B - A = 0,0006347 \, . \, a$.

Repraeſentet Fig. 11. partem mappae ſpecialis, in qua BC Meridianus centri ſeu Zenith C, cuius Parallelus $P p$ ſub latitudine β; et alius cuiusdam puncti A, cuius Parallelus $Q q$, latitudo ſit $= \beta + 1°$. Centrum Paralleli $Q q$ ſit B, eritque ſecundum leges proiectionis ſtereographicae ſphaericae,

ricae,

$$AB = \frac{a\,coſ.(\beta + 1^\circ)}{ſin.\,\beta + ſin.(\beta + 1^\circ)},$$

$$BC = \frac{a\,coſ.\,\beta}{ſin.\,\beta + ſin.(\beta + 1^\circ)},$$

ideoque, ſi ponatur magnitudo unius gradus latitudinis in medio mappae $= \delta$, erit

$$\delta = AC = \frac{a\,[coſ.\,\beta - (coſ.\,\beta + 1^\circ)]}{ſin.\,\beta + ſin.(\beta + 1^\circ)};$$

unde reperitur $a = \frac{ſin.\,\beta + ſin.(\beta + 1^\circ)}{coſ.\,\beta - coſ.(\beta + 1^\circ)}\delta$. Quodſi itaque ſumatur $\beta = 30^\circ\,13'$, et $\delta = 3$ digitis, erit $a = 114, 59$. digitis, et correctio proiectionis poli ellipticae $= 0, 0727$. digitis ſeu $0, 872$ lin. duodecim. Proinde haec differentia in mappis quidem ſpecialioribus, ubi nempe $\delta > 3$ digitis, ſenſibilis fit. Quia vero hocce caſu proiectio poli extra mappae limites cadit, aliis autem caſibus, ubi mappa regiones continet polo vicinas, correctio multo minor fit aut polaris proiectio adhiberi ſolet, his non diutius immoror.

§. 3. Conſideretur iam quicunque Parallelus MN, cuius proiectio mn erit coni MON ſuper baſe circulari MN, interſectio cum plano tabulae, cui OZ in puncto C normalis. Statuatur eius latitudo $= \Phi$, et angulus $MCA = \Phi'$, qui invenitur in tabula, ſicut ſupra β' ex β. Ducatur Mz normalis ad OZ, atque poſito $CM = CN = az'$, erit $Oz : OC = Mz : mC$, ideoque Tab. IV. Fig. 10.

$$mC = \frac{az}{oz}\cdot Mz = \frac{aazz'\,ſin.(\beta' - \Phi')}{oz},$$

ob $MCZ = \beta' - \Phi'$. Praeterea eſt $PCn = \beta'$, unde ſi diameter Paralleli MN axem Pp ſecet in b et rectam mn in c, erit

$$Cc = Cb\ ſec.\ \beta';\ cb = Cb\ tang.\ \beta';\ \text{at}$$

$$Cb = CM\ ſin.\ CMb = az'\ ſin.\ \Phi',$$

proinde $Cc = az'\ ſin.\Phi'\ ſec.\ \beta'$, $cb = az'\ ſin.\ \Phi'\ tang.\ \beta'$, et

Mb

$Mb = az'\ \text{coſ.}\ \Phi'$. Hinc habemus

$$mc = az'\left(\frac{az\ \text{ſin.}(\beta'-\Phi')}{Oz} + \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{ſec.}\ \beta'\right);$$

$$Mc = az'(\text{coſ.}\ \Phi' + \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{tang.}\ \beta');\ \text{et}$$

$$mc : Mc =$$

$$az\ \text{ſin.}(\beta'-\Phi') + Oz.\ \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{ſec.}\ \beta' : Oz\ (\text{coſ.}\ \Phi' + \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{tang.}\ \beta').$$

Sed eſt

$$Oz = a[z + z'\ \text{coſ.}(\beta'-\Phi')];$$

quo valore in priori membro ſubſtituto, erit

$$mc : Mc = az(\text{ſin.}\ \beta'\ \text{coſ.}\ \Phi' - \text{coſ.}\ \beta'\ \text{ſin.}\ \Phi' + \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{ſec.}\ \beta')$$

$$+ az\ (\text{ſin.}\ \Phi'\ \text{coſ.}\ \Phi' + \text{tang.}\ \beta'\ \text{ſin.}^2\Phi') : Oz(\text{coſ.}\ \Phi' + \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{tang.}\ \beta').$$

Quare cum ſit $\text{ſec.}\ \beta' - \text{coſ.}\ \beta' = \text{ſin.}\ \beta'\ \text{tang.}\ \beta'$, erit diviſione per $\text{coſ.}\ \Phi' + \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{tang.}\ \beta'$ inſtituta,

$$mc : Mc = az\ \text{ſin.}\ \beta' + az'\ \text{ſin.}\ \Phi' : Oz,\ \text{ſeu}$$

$$mc : Mc = z\ \text{ſin.}\ \beta' + z'\ \text{ſin.}\ \Phi' : z + z'\ \text{coſ.}(\beta'-\Phi').$$

Eodem modo, ducta Ny normali ad OZ, habetur $Oy : OC = Ny : Cn$, et $Ny = CN\ \text{ſin.}\ OCN = az'\ \text{ſin.}(\beta'+\Phi)$, unde $Cn = \frac{aazz'\ \text{ſin.}(\beta'+\Phi')}{Oy}$. Praeterea eſt

$$Cy = az'\ \text{coſ.}(\beta'+\Phi'),\ \text{et}$$

$$Oy = az - az'\ \text{coſ.}(\beta'+\Phi').$$

Habemus itaque

$$nc = Cn - Cc = az'\left(\frac{az\ \text{ſin.}(\beta'+\Phi')}{Oy} - \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{ſec.}\ \beta'\right),$$

$$Nc = Mb - cb = az'(\text{coſ.}\ \Phi' - \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{tang.}\ \beta');$$

ideoque

$$nc : Nc = az(\text{ſin.}\ \beta'\ \text{coſ.}\ \Phi' + \text{coſ.}\ \beta'\ \text{ſin.}\ \Phi' - \text{ſec.}\ \beta'\ \text{ſin.}\ \Phi')$$

$$+ az'(\text{ſin.}\ \Phi'\ \text{coſ.}\ \Phi' - \text{tang.}\ \beta'\ \text{ſin.}^2\Phi') : Oy\ (\text{coſ.}\ \Phi' - \text{tang.}\ \beta'\ \text{ſin.}\ \Phi')$$

$$= az\ \text{ſin.}\ \beta' + az'\ \text{ſin.}\ \Phi' : Oy,\ \text{ſive}$$

$$nc : Nc = z\ \text{ſin.}\ \beta' + z'\ \text{ſin.}\ \Phi' : z - z'\ \text{coſ.}(\beta'+\Phi').$$

§. 4.

§. 4. Sit nunc $m\,Q\,n$ proiectio Paralleli MN, per cuius punctum Q ponatur planum $L\,Q\,l$ baſi coni MON parallelum; eritque $L\,Q\,l$ circulus, ideoque ducta $Q\,q$ ad $L\,l$ et $m\,n$ normali, fiet $Q\,q^2 = L\,q\,.\,q\,l$. At, literis hic idem denotantibus ac in Fig. 10. eſt $m\,c : M\,c = m\,q : L\,q$, et $n\,c : N\,c = n\,q : q\,l$, unde poſitis $Q\,q = u$, $m\,q = t$, $m\,n = 2\,\alpha$, erit Tab. IV. Fig. 12.

$$u\,u = \frac{Mc}{mc}\,.\,\frac{Nc}{nc}\,.\,t\,(2\,\alpha - t),\ \text{ſeu}$$

$$u\,u = \frac{[z + z'\,cof.\,(\beta' - \Phi')]\ [z - z'\,cof.\,(\beta' + \Phi')]}{(z\,fin.\,\beta' + z'\,fin.\,\Phi')^2}\,.\,t\,(2\,\alpha - t)$$

$$= \frac{z\,z + 2\,z\,z'\,fin.\,\beta'\,fin.\,\Phi' + z'\,z'\,(fin^2.\,\beta' - cof.^2\,\Phi')}{(z\,fin.\,\beta' + z'\,fin.\,\Phi')^2}\,.\,t\,(2\,\alpha - t).$$

Reperitur autem

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(C\,m + C\,n) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\,z\,z'\,fin.\,(\beta' - \Phi')}{z + z'\,cof.\,\beta - \Phi')} + \frac{a\,z\,z'\,fin.\,(\beta' + \Phi')}{z - z'(cof.\,\beta' + \Phi')}\right)\ (\S.\,3.)$$ Fig. 10.

$$= \frac{a\,z\,z'\,cof.\,\Phi'\,(z\,fin.\,\beta' + z'\,fin.\,\Phi')}{[z + z'\,cof.\,(\beta' - \Phi')]\ [z - z'\,cof.\,(\beta' + \Phi')]}.$$

Quo valore introducto habemus

$$u\,u = \frac{a\,a\,z\,z\,z'\,z'\,cof.^2\,\Phi'\,(2\,\alpha\,t - t\,t)}{\alpha\,\alpha\,[z + z'(cof.\,\beta' - \Phi')]\ [z - z'\,cof.\,(\beta' + \Phi')]};$$

unde perſpicitur, proiectionem eſſe ellipſin, cuius ſemiaxis transverſus $= \alpha$, coniugatus vero $=$

$$\beta = \frac{a\,z\,z'\,cof.\,\Phi'}{\sqrt{[z + z'\,cof.\,(\beta' - \Phi')]\ [z - z'\,cof.\,\beta' + \Phi')]}}\ \text{et}$$

$$\frac{\beta\,\beta}{\alpha\,\alpha} = \frac{B}{A} = \frac{[z + z'\,cof.\,(\beta' - \Phi')]\ [z - z'\,cof.\,(\beta' + \Phi')]}{(z\,fin.\,\beta' + z'\,fin.\,\Phi')^2}$$

$$= \frac{z\,z + 2\,z\,z'\,fin.\,\beta'\,fin.\,\Phi' + z'\,z'\,(fin^2.\,\Phi' - cof^2.\,\beta')}{z\,z\,fin.^2\,\beta + 2\,z\,z'\,fin.\,\beta'\,fin.\,\Phi' + z'\,z'\,fin.^2\,\Phi'}.$$

Hic ſi numerator B a denominatore A ſubtrahatur, fiet

$$A - B = cof.^2\,\beta'\,(z'\,z' - z\,z).$$

Ergo α eſt axis maior et β axis minor, h. e. axis transverſus verticesque ellipſeos cadunt in ipſum Meridianum $q\,n$ puncti Zenith (Fig. 10.), quando $z' > z$, ſeu $\Phi < \beta$. Illi autem Paralleli, quorum latitudo maior eſt latitudine puncti Zenith, proiiciuntur in ellipſes, quarum axes coniugati coincidunt cum Meridiano $q\,n$, axes autem transverſi ad Meridianum Zenith

 fiunt

fiunt normales. Appropinquante itaque puncto M ad Z, A−B decreſcit, et ſimulac M ad alteram puncti Z partem cadit, differentia A — B fit negativa; conſequenter, cadente M in Z, eſſe debet $\alpha - \beta = 0$, ſeu proiectio Paralleli ipſius Zenith eſt circulus radio $\alpha = \beta$ deſcriptus. Calculus etiam iſto caſu, ob $\beta' = \Phi'$, $z = z'$, praebet

$$\alpha = \frac{a\,z\,ſin.\,\beta'\,coſ.\,\beta'}{1 - coſ.\,2\beta} = \tfrac{1}{2}\,a\,z\,\text{cot.}\,\beta', \text{ et}$$

$$\beta = \frac{a\,z\,coſ.\,\beta'}{\sqrt{2\,(1 - coſ.\,2\beta')}} = \tfrac{1}{2}\,a\,z\,\text{cot.}\,\beta' = \alpha.$$

Quando M eſt punctum Aequatoris, z' ideoque et differentia A — B eſt Maximum, unde proiectio Aequatoris eſt ellipſis maxime oblonga. Fit nempe hocce caſu $z' = 1$, $\Phi' = 0$, ergo $\alpha = \frac{a\,z\,z\,ſin.\,\beta'}{z\,z - coſ.^2\,\beta'}$, et $\beta = \frac{a\,z}{\sqrt{(z\,z - coſ.^2\,\beta)}}$, ideoque $\frac{\alpha\,\alpha}{\beta\,\beta} = \frac{z\,z\,ſin.^2\,\beta'}{z\,z - coſ.^2\,\beta'}$. Eliminari hinc poteſt z, quia

$$z\,z = \frac{1}{coſ.^2\,\beta' + m^2\,ſin.^2\,\beta'}, \text{ (§. 2.)}.$$

unde reperitur

$$\frac{\alpha\,\alpha}{\beta\,\beta} = \frac{ſin.^2\,\beta'}{1 - coſ.^4\,\beta' - m^2\,ſin.^2\,\beta'\,coſ.^2\,\beta'} = \frac{1}{1 - (m^2 - 1)\,coſ.^2\,\beta'}.$$

Quodſi nunc ſtatuamus $\frac{\alpha\,\alpha}{\beta\,\beta} = \frac{a\,a}{b\,b} = m\,m$, fiet

$$coſ.^2\,\beta' = \frac{m^2 - 1}{m^2\,(m^2 - 1)},$$

et $coſ.\,\beta' = \frac{1}{m} = 0,99565$, proinde $\beta' = 5°\,20'\,41''$, et $\beta = 5°\,23'\,28''$. In proiectione itaque ſtereographica horizontali, cuius Zenith eſt ſub latitudine $= 5°\,23'\,28''$, Aequator proiicitur in ellipſin Meridianis ellipticis in telluris ſuperficie ſimilem. Eodem caſu axes ſunt:

$$\alpha = \frac{a}{ſin.\,\beta'} \times \frac{\alpha\,\alpha}{\beta\,\beta} = \frac{a\,m\,m}{ſin.\,\beta'} = \frac{a\,m^3}{\sqrt{(m^2 - 1)}} = 10,82944\,.\,a,$$

et $\beta = \frac{\alpha}{m}$.

Caeterum proiectio *a* puncti A in Aequatore (Fig. 10.), quae eſt vertex ellipſeos aequatorialis, reperitur, ſi in aequatione

tione pro C m (§. 3.) ponatur $\Phi' = 0$, et $z' = 1$; unde fit $C\,a = \frac{a\,z\,ſin.\,\beta'}{z + coſ.\,\beta'}$.

§. 5. Inter ellipſes, quarum axes transverſi ſunt ad lineam $q\,n$ perpendiculares, ſeu quarum latitudo maior eſt latitudine Zenith, illa, quae polo eſt proxima, maxime a circulo differt. Poſito nempe $z' = \frac{b}{a} = \frac{1}{m}$, et $\Phi' = 90^\circ$, evaneſcit quidem axis uterque α et β, at fit

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{z + \frac{ſin.\,\beta'}{m}}{z\,\text{ſin.}\,\beta' + \frac{1}{m}} = \frac{m\,z + \text{ſin.}\,\beta'}{m\,z\,\text{ſin.}\,\beta' + 1},$$

(§. 4.), qui igitur eſt limes rationis, ubi axes evaneſcunt. Sin autem ponatur $\Phi' = A\,C\,D = -\beta'$, ob $z' = z$, fit $\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{0}{0}$; at

$$u\,u = \frac{(1 + coſ.\,2\,\beta')(1 - 1)}{0^2}\,t\,(2\,\alpha - t) = \infty;$$

poſito vero $t = 0$, erit $u\,u = \frac{0^2}{0^2}$ indeterminatum: unde patet, Parallelum, qui ad oppoſitam partem tantundem ab Aequatore diſtat ac Zenith, proiici in lineam rectam, quae in puncto d lineam $q\,n$ normaliter ſecat, ſiquidem abciſſae t a puncto d computantur: prorſus ac in proiectione ſphaerica. Eiusmodi enim Parallelus per punctum O neceſſario tranſit, ſiquidem aſſumitur $O\,C\,R = \beta'$. Ceterum eſt $C\,d = a\,z\,\text{tang.}\,\beta'$: eſt enim $D\,C\,Z = 2\,\beta' = 2\,C\,O\,D$, ob $C\,D = a\,z = C\,O$, et $C\,d = C\,O\,\text{tang.}\,C\,O\,d$. Idem ſequitur e formula pro C m generali, quae hocce caſu fit

$$= \frac{a\,z\,ſin.\,2\,\beta'}{1 + coſ.\,2\,\beta'} = \frac{2\,a\,z\,ſin.\,\beta'\,coſ.\,\beta'}{1 + coſ.^2\,\beta - ſin.^2\,\beta'} = a\,z\,\text{tang.}\,\beta'.$$

Perſpicimus denique, $C\,m = \frac{a\,z\,z'\,ſin.\,(\beta - \Phi')}{z + z'\,coſ.\,(\beta' - \Phi')}$ fieri negatiuam, ſeu integram ellipſin ad dextram puncti C partem cadere, ſi $\Phi > \beta$. Sin autem angulus Φ ſit negativus, atque $\Phi > \beta$, $C\,n = \frac{a\,z\,z'\,ſin.\,(\beta' + \Phi')}{z - z'\,coſ.\,(\beta + \Phi')}$ fit negativa, h. e. integra ellipſis cadit

 ſini-

ſiniſtrorſum: hocce namque caſu punctum N ad ſiniſtram oculi O partem cadere patet.

§. 6. *Meridianorum* proiectio petenda eſt e cono, cuius vertex in O, baſis Meridianus ellipticus quicunque $PLpl$, cuiusque interſectio cum plano horizontis $HLIl$ erit proiectio quaeſita. Computatis longitudinibus a Meridiano Zenith PZH, ſit longitudo Meridiani proiiciendi PLp, ſeu angulus ſolidus $HPL = \alpha$, et ceterae literae idem denotent quod ſupra in Fig. 10; eritque Qq interſectio plani tabulae cum plano per verticem coni et polos P, p, poſito. Per §. 2. autem habemus $CQ = \frac{a\,z\,coſ.\,\beta'}{m\,z + ſin.\,\beta'}$, $Cq = \frac{a\,z\,coſ.\,\beta'}{m\,z - ſin.\,\beta'}$, conſequenter $Qq = \frac{2\,a\,m\,z\,z\,coſ.\,\beta}{m^2\,z^2 - ſin^2\,\beta'}$.

Fig. 13.

Seorſim iam conſideretur conus OPp. Per medium C lineae Pp ducatur axis coni OC, et planum qMQ axi normale, quod erit planum horizontis; eiusque cum cono interſectio ſit curva qMQ, per cuius punctum M ponatur planum dMD baſi coni $p\pi P$ parallelum, cuius cum plano OpP interſectio ſit dD. A puncto M ductis rectis Mm, MN, ad lineas qQ, dD normalibus, erit dMD ellipſis Meridiano elliptico $P\pi p$ ſimilis (Diff. I. §. 6.), unde habemus $MN^2 = m^2 . ND . Nd$. Cum iam ſit planum qMQ plano OqQ normale, et $Mmq = 90°$, erit quoque Mm ad planum OqQ normalis, et cum praeterea ſit MNd angulus rectus, ſequitur etiam $mNd = 90°$. Vnde perſpicitur, angulum MNm eſſe inclinationem planorum OpP et dMD, ideoque $MNm = \alpha$. Hinc nanciſcimur $Mm = MN\,ſin.\,d$, ob $MmN = 90°$. Fit itaque $Mm^2 = mm\,ſin.^2\,\alpha . Nd . ND$.

Fig. 14.

Sit ME interſectio planorum qMQ et dMD, eritque ob $Ed \# pP$, $Ed = \frac{pC . Eq}{Cq}$, et $NE = EM\,coſ.\,\beta'$, ob

mNE

m N E $= 90°$, et m E N $= q$ C $p = \beta'$. Hinc habemus

$$\text{N}\,d = \text{E}\,d - \text{E N} = \text{E}\,m\,(\tfrac{b}{c\,q} - \text{coſ.}\,\beta') + \tfrac{b\,.\,q\,m}{c\,q}$$

$$= \text{E}\,m\ \text{ſin.}\,\beta'\,.\,\tfrac{m\,z\,\text{ſin.}\,\beta' - 1}{m\,z\,\text{coſ.}\,\beta'} + \tfrac{m\,z - \text{ſin.}\,\beta'}{m\,z\,\text{coſ.}\,\beta'}\,.\,q\,m.$$

Simili modo reperitur D E $= \frac{\text{PC}\,.\,\text{EQ}}{\text{CQ}}$, proinde

$$\text{D N} = \tfrac{\text{PC}\,.\,\text{EQ}}{\text{CQ}} + \text{E}\,m\ \text{coſ.}\,\beta' = \tfrac{b}{\text{CQ}}\,.\,m\,\text{Q}$$
$$- \text{E}\,m\,(\tfrac{b}{\text{CQ}} - \text{coſ.}\,\beta'),$$

aut ſi ponatur q Q $= 2\,\alpha$, $q\,m = t$, erit

$$\text{D N} = \tfrac{m\,z + \text{ſin.}\,\beta'}{m\,z\,\text{coſ.}\,\beta'}\,(2\,\alpha - t) - \text{E}\,m\ \text{ſin.}\,\beta'\,.\,\tfrac{m\,z\,\text{ſin.}\,\beta' + 1}{m\,z\,\text{coſ.}\,\beta'}\,.$$

Hinc fit

$$\text{N}\,d\,.\,\text{N D} = \tfrac{1}{m^2\,z^2\,\text{coſ.}^2\,\beta'}\,[(m^2\,z^2 - \text{ſin.}^2\,\beta')\,(2\,\alpha\,t - t\,t)$$
$$+ \text{E}\,m\,\text{ſin.}\,\beta'\,(m^2\,z^2\,\text{ſin.}\,\beta' - m\,z\,\text{coſ.}^2\,\beta' - \text{ſin.}\,\beta')\,(2\,\alpha - t)$$
$$- \text{E}\,m\ \text{ſin.}\,\beta'\,(m^2\,z^2\,\text{ſin.}\,\beta' + m\,z\,\text{coſ.}^2\,\beta' - \text{ſin.}\,\beta')\,t$$
$$- \text{E}\,m^2\,\text{ſin.}^2\,\beta'\,(m^2\,z^2\,\text{ſin.}^2\,\beta' - 1)]$$
$$= \tfrac{1}{m^2\,z^2\,\text{coſ.}^2\,\beta'}\,[(m^2\,z^2 - \text{ſin.}^2\,\beta')\,t\,(2\,\alpha - t)$$
$$+ 2\,\alpha\,.\,\text{E}\,m\,\text{ſin.}\,\beta'\,(m^2\,z^2\,\text{ſin.}\,\beta' - m\,z\,\text{coſ.}^2\,\beta' - \text{ſin.}\,\beta')$$
$$- 2\text{E}\,m\,\text{ſin.}^2\beta'(m^2z^2 - 1)\,t - \text{E}\,m^2\,\text{ſin.}^2\,\beta'(m^2z^2\,\text{ſin.}^2\beta' - 1)].$$

Quo nunc eliminari poſſit linea E m, conſideretur triangulum ſolidum M m N E circa centrum E, in quo angulus ſolidus ad E $m = 90°$, ad E N $= \alpha$, et hedra q E $d = \beta'$, unde erit tang. M E $m =$ ſin. β' tang. α, ideoque in triangulo E m M ad m rectangulo, E $m = \frac{\text{M}\,m}{\text{ſin.}\,\beta'\,\text{tang.}\,\alpha}$, ſeu poſito M $m = u$, E $m = u$ cot. α coſec. β'. Quo valore loco E m in aequatione modo inventa ſubſtituto, habemus

$$u\,u = m^2\,\text{ſin.}^2\,\alpha\,.\,\text{N}\,d\,.\,\text{N D}$$
$$= \tfrac{\text{ſin.}^2\,\alpha}{z^2\,\text{coſ.}^2\,\beta'}\,[(m^2\,z^2 - \text{ſin.}^2\,\beta')\,t\,(2\alpha - t) + 2\alpha\,\text{cot.}\,\alpha\,(m^2\,z^2\,\text{ſin.}\,\beta'$$
$$- m\,z\,\text{coſ.}^2\,\beta' - \text{ſin.}\,\beta')\,u - 2\,\text{cot.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta'\,(m^2\,z^2 - 1)\,u\,t$$
$$- \text{cot.}^2\,\alpha\,(m^2\,z^2\,\text{ſin.}^2\,\beta - 1)\,u\,u],$$

 ſeu

ſeu

$$u\,u\,[z^2 \cos.^2 \beta' + (m^2 z^2 \sin.^2 \beta' - 1) \cos.^2 \alpha]$$
$$- 2 \sin.\alpha \cos.\alpha\, [\alpha\, (m^2 z^2 \sin.\beta' - m\, z \cos.^2 \beta' - \sin.\beta')$$
$$- \sin.\beta'\, (m^2 z^2 - 1)\, t\,]\, u$$
$$- \sin.^2 \alpha\, (m^2 z^2 - \sin.^2 \beta')\, t\, (2\,\alpha - t) = 0.$$

Coëfficiens termini primi $u\,u$ eſt $= z\,z \sin.^2 \alpha \cos.^2 \beta'$, ob $z^2 \cos.^2 \beta' + m^2 z^2 \sin.^2 \beta' = 1$ (§. 2.). Hinc aequatio fit:

$$z\,z \cos.^2 \beta' \,.\, u\,u - 2 \cot.\alpha\, [\alpha \sin.\beta'\, (m^2 z^2 - 1)$$
$$- \alpha\, m\, z \cos.^2 \beta' - \sin.\beta'\, (m^2 z^2 - 1)\, t\,]\, u$$
$$- (m^2 z^2 - \sin.^2 \beta')\, t\, (2\,\alpha - t) = 0;$$

cuius loco ſcribamus

$$A\,u\,u - 2\,(B - C\,t)\,u - D\,(2\,\alpha\,t - t\,t) = 0.$$

Sic aequationem invenimus ſatis inconcinnam, quod nec aliter evenire poterat, cum linea $q\,Q$ non ſit diameter curvae $q\,M\,Q$. Poſito enim $t = \alpha = q\,K$, ordinata tranſiret per centrum K ſectionis conicae, adeoque foret pariter diameter, ſi $q\,Q$ eſſet diameter; verum in aequatione noſtra, poſito $t = \alpha$, coëfficiens ipſius u non evaneſcit. Neque plus commodi affertur, ſi aequatio ad diametros principales quaeratur. Ea enim evolutio ad calculum perducit tam prolixum, qui omni omnino uſu careret. Unde nihil ſupereſt niſi ut ope aequationis puncta determinentur principalia, per eaque methodo ſupra iam adhibita circulus ducatur. Ceterum quia planum $q\,M\,Q$ ſemper ad axem coni O C eſt normale, ſequitur curvam $q\,M\,Q$ nunquam fieri poſſe hyperbolam vel parabolam. Sed neque circulus eſſe poteſt: ſumto enim $t = q\,K = \alpha$, aequatio noſtra fit:

$$A\,u\,u + 2\,m\,z\,\alpha\,u \cot.\alpha \cos.^2 \beta' - D\,\alpha\,\alpha = 0.$$

Si iam curva eſſet circulus, applicatam e K prolongatam per cen-

centrum circuli tranſire oporteret, quae ſi curvae iterum in puncto ε occurreret, foret $e\,K \,.\, \varepsilon\,K = q\,K^2 = \alpha\,\alpha$. Ex aequatione autem habemus $e\,K \,.\, \varepsilon\,K = \frac{D}{A} \,.\, \alpha\,\alpha$, quapropter eſſe oporteret $D = A$, h. e.

$$m^2 z^2 - \text{ſin.}^2\,\beta' = z^2 \text{coſ.}^2\,\beta' = 1 - m^2 z^2 \text{ſin.}^2\,\beta',$$

(§. 2.), ſive

$$0 = (m^2 z^2 - 1)(1 + \text{ſin.}^2\,\beta'),$$

quod, cum $1 + \text{ſin.}^2\,\beta'$ evaneſcere nequeat, daret $m\,z = 1$, vel $a\,z = \frac{a}{m} = b$, quae eſt proiectio polaris. Perſpicimus itaque, omnium Meridianorum proiectiones eſſe ellipſes, excepto Meridiano oculi ſeu Zenith, qui proiicitur in lineam rectam.

§. 7. De *conſtructione* hic ſunt repetenda, quae iam in *Diſſert. prima* monuimus. Cum in praxi nimis operoſum foret ellipſes deſcribere, et vel nulla inde ſperari poſſet exactitudo, inprimis cum, quae hic occurrunt, ellipſes tam parum a circulo differant, ſufficiet, puncta quaedam notabiliora determinare, per quae ellipſis tranſire deberet, ac per ea puncta circulum ducere. Qua methodo tum inprimis eſt utendum, quando circulorum vel ellipſium diametri tantae fiunt, ut vel in adornandis mappis ſphaericis ſoleat per puncta quaedam determinata, aut manu libera aut alio modo mechanico curva deſcribi, quae circulus eſſe ſupponitur.

Quod quidem primum ad ipſum attinet horizontem $H\,L\,I\,l$, eius proiectio, h. e. interſectio plani tabulae cum ſphaeroide elliptica eſt ellipſis, cuius axes ſunt $2\,a$ et $H\,I$; cuius rei demonſtratione ſimul poteſt generaliter evinci ſequens Theorema: Fig. 13.

Si

Si ſphaerois elliptica plano per centrum ſecetur, interſectionis figura erit ellipſis, cuius axis transverſus aequalis axi ſphaeroidis maximo $= 2a$, *axis autem coniugatus* $= \frac{2a}{\sqrt{(\cos.^2\gamma + m^2 \sin.^2\gamma)}}$, poſita nempe inclinatione plani ſecantis ad ſphaeroidis Aequatorem $= \gamma$. *Demonſtratio*: In figura interſectionis H L I arbitrarie aſſumatur punctum L, per quod ducatur Meridianus P L p, ac ſi H I fit interſectio plani ſecantis cum Meridiano ipſi normali, qui Meridianum P L p ſecet ſub angulo $= \alpha$, agatur L λ ad H I normalis, et appellatis $C\lambda = x$, $L\lambda = y$, habemus primum in triangulo ſolido rectangulo, cuius centrum C, hedrae P C H, P C L, H C L,

$$\text{tang. } HCL = \text{tang. } \alpha \text{ fin. } PCH.$$

Verum eſt

$$PCH = 90^\circ + ACH = 90^\circ + \gamma,$$

ergo tang. H C L $=$ tang. α coſ. γ. Simili modo fit

$$\text{tang. } PCL = \frac{\text{tang. } PCH}{\cos. \alpha} = \frac{-\cot. \gamma}{\cos. \alpha}.$$

Supra autem e natura Meridianorum ellipticorum deduximus (§. 2.), eſſe generatim $zz = \frac{1}{\cos^2.\beta' + m^2 \sin^2.\beta'}$, ubi eſt $\beta' =$ P C L $- 90^\circ$, et C L $= az$; ergo

$$CL^2 = \frac{aa}{\sin^2. PCL + m^2 \cos^2. PCL}.$$

Verum eſt

$$\sin^2. PCL = \frac{\cot^2. \gamma}{\cos^2. \alpha + \cot^2. \gamma}, \text{ et}$$

$$\cos^2. PCL = \frac{\cos^2. \alpha}{\cos^2. \alpha + \cot^2. \gamma},$$

quibus ſubſtitutis fiet

$$CL^2 = xx + yy = \frac{aa(\cos^2. \alpha + \cot^2. \gamma)}{\cot^2. \gamma + m^2 \cos^2. \alpha}.$$

Praeterea eſt

$$y = x \text{ tang. } HCL = x \text{ tang. } \alpha \cos. \gamma, \text{ unde}$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{y}{x \cos. \gamma} \text{ et } \cos^2. \alpha = \frac{xx \cos^2. \gamma}{yy + xx \cos^2. \gamma}.$$

Qui

Qui valor ſi in aequatione modo reperta ſubſtituatur, fiet

$$x\,x + y\,y = \frac{a\,a\,[x\,x\,\mathrm{coſ}^2.\,\gamma\,(1 + \mathrm{cot}^2.\,\gamma) + y\,y\,\mathrm{cot}^2.\,\gamma]}{y\,y\,\mathrm{cot}^2.\,\gamma + x\,x\,\mathrm{coſ}^2.\,\gamma\,(\mathrm{cot}^2.\,\gamma + m\,m)}$$
$$= \frac{a\,a\,(x\,x + y\,y)}{y\,y + x\,x\,(\mathrm{coſ}^2.\,\gamma + m^2\,\mathrm{ſin}^2.\,\gamma)},$$

ſeu

$$y\,y + x\,x\,(\mathrm{coſ}^2.\,\gamma + m^2\,\mathrm{ſin}^2.\,\gamma) - a\,a = 0.$$

Poſito $x = 0$, fit $y = a$, at ſi $y = 0$,

$$x\,x = \mathrm{C\,H}^2 = \frac{a\,a}{\mathrm{coſ}^2.\,\gamma + m^2\,\mathrm{ſin}^2.\,\gamma},$$

unde patet propoſitum. Eundem pro C H valorem nacti fuiſſemus, ſi in aequatione generali pro $z\,z$ loco β' ſubſtituiſſemus $\gamma = \mathrm{A\,C\,H}$. Si $\gamma = 90°$, planum ſecans fit Meridianus, $\mathrm{C\,H}^2 = \frac{a\,a}{m\,m} = b\,b$, et $y\,y + m\,m\,x\,x = a\,a$, ut ſupra. Si $\gamma = 0$, eſt $\mathrm{C\,H}^2 = a\,a$, et $y\,y + x\,x = a\,a$, quae eſt aequatio pro circulo, nempe Aequatore.

Noſtro caſu eſt $\gamma = \mathrm{A\,C\,H} = 90° - \beta'$. Ergo horizon, ſeu baſis hemiſphaerii proiecti in horizontem loci, cuius latitudo $= \beta$, eſt ellipſis, cuius ſemiaxis transverſus $= a$, coniugatus $= \frac{a}{\sqrt{(\mathrm{ſin}^2.\,\beta' + m^2\,\mathrm{coſ}^2.\,\beta')}}$. Cum C H ſemper maior ſit quam b, ellipſis horizontis ſemper minus adhuc a circulo differt quam Meridiani elliptici. Unde ſine errore ſenſibili pro horizonte aſſumi poteſt circulus radio a deſcriptus.

§. 8. Per centrum horizontis C ducatur recta indefinita I H, in qua capiatur $\mathrm{C\,Q} = \frac{a\,z\,\mathrm{coſ}.\,\beta'}{m\,z + \mathrm{ſin}.\,\beta'}$ (§. 2.), atque erit Q proiectio poli elevati. Quia proiectio q alterius poli procul extra mappae limites cadit, capiatur Fig. 15.

$$\mathrm{Q\,K} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Q}\,q = \frac{a\,m\,z\,z\,\mathrm{coſ}.\,\beta'}{m^2\,z^2 - \mathrm{ſin}^2.\,\beta'},$$

(§ 6.) et per punctum K ducatur DE normalis ad IH. Cum iam omnes Meridiani per polos Q, q, tranſeant, ſequitur, omnium centra in linea DE eſſe ſita, ſi nempe loco ellipſium ſubſtituantur circuli; unde ſufficit quaerere punctum M, ubi Meridianus lineam DE ſecundum hypotheſin ellipticam ſecat, ac per puncta Q, M, q, circulum deſcribere. Quem in finem in aequatione ſupra inventa (§. 6.) ponamus $t = \alpha$, ut fiat

$$A u u + 2 m z \alpha u \cot. \alpha \cos^2. \beta' - D \alpha \alpha = 0.$$

Ex binis radicibus minor ac poſitiva eſt KM. Ergo fit

$$u = KM = \frac{\alpha [\sqrt{(m^2 z^2 \cot^2. \alpha \cos^4. \beta' + AD)} - m z \cot. \alpha \cos^2. \beta']}{A},$$

ubi ſi ſubſtituantur valores pro α, A et D, erit

$$KM = \frac{a m z [\sqrt{(m^2 \cot^2. \alpha \cos^2. \beta' + m^2 z^2 - \sin^2. \beta)} - m \cot. \alpha \cos. \beta']}{m^2 z^2 - \sin^2. \beta'},$$

quae forma ſatis eſt prolixa. Scripto autem in quantitate radicali 1 loco $m^2 z^2$ fiet

$$KM = \frac{a m z \cos. \beta' [\sqrt{(m^2 \cot^2. \alpha + 1)} - m \cot. \alpha]}{m^2 z^2 - \sin^2. \beta'}.$$

Quantitas radicalis, quae eſt =

$$\sqrt{(\operatorname{coſec}^2. \alpha + (m^2 - 1) \cot^2. \alpha)} = \cot. \alpha \sqrt{(\sec^2. \alpha + m^2 - 1)},$$

evoluta fit

$$= \cot. \alpha [\sec. \alpha + \tfrac{1}{2} (m^2 - 1) \cos. \alpha],$$

unde ob $z \cos. \beta' = y$, nanciſcimur

$$KM = \frac{a m y [\sec. \alpha + \frac{1}{2} (m^2 - 1) \cos. \alpha - m]}{\tan. \alpha (m^2 z^2 - \sin^2. \beta')}.$$

Si $\alpha = 0$, aequatio praebet $u = 0$: ipſa nempe recta IH eſt proiectio Meridiani puncti Zenith. Si vero $\alpha = 90°$, fit

$u u =$

$$u\,u = \frac{(m^2 z^2 - ſin^2.\beta')(2\alpha t - t\,t)}{z\,z\,coſ^2.\beta'}.$$

Proinde $Q\,q$ eſt diameter principalis, et ratio duplicata axium

$$= \frac{MK^2}{\alpha\,\alpha} = \frac{m^2 z^2 - ſin^2.\beta'}{z\,z\,coſ^2.\beta'} = m^2 + (m^2 - 1)\,ſin^2.\beta',$$

ſi nempe ſubſtituatur

$$z\,z = \frac{1}{coſ^2.\beta' + m^2 ſin^2.\beta'};$$

unde ſequitur eſſe $MK > QK$, rationemque axis maioris ad minorem ſeu excentricitatem ellipſeos cum latitudine β creſcere. Maxima igitur eſt $= 2\,m^2 - 1$, ſi $\beta = 90°$, quae itaque eſt limes rationis axium, ubi ellipſis abit in lineam rectam, quoniam in proiectione polari Meridiani proiiciuntur in lineas rectas. Minima autem eſt $= m\,m$, ſi $\beta = 0$, quod perfecte congruit cum eo quod ſupra demonſtrauimus, in proiectione aequatorea Meridianorum proiectiones eſſe ellipſes ipſis Meridianis ſimiles. Simul perſpicimus, hancce rationem ab Aequatore inde ad Polum vix ſenſibiliter creſcere. Ceterum pro Meridiano 90° a Meridiano Zenith diſtante punctum M determinatur aequatione:

$$KM = \frac{\alpha\,m\,y}{\sqrt{(m^2 z^2 - ſin^2.\beta')}},$$

quo facto per puncta Q, M, q, circulus duci poteſt.

§. 9. Paralleli proiiciuntur in ellipſes, quarum axes α et β ſupra (§. 4.) invenimus eſſe in ratione ſubdupla $\frac{A}{B}$, cuius differentiale ſi ponatur $= 0$, reperitur

$$z'\,coſ^2.\beta'\,coſ.\Phi'\,(z'z' - z\,z)\,(z\,ſin.\beta' + z'\,ſin.\Phi') = 0,$$

unde eſſe debet aut $z'\,ſin.\Phi' = -z\,ſin.\beta'$, quod indicat Parallelum, cuius latitudo oppoſita et aequalis latitudini Zenith, qui proiicitur in lineam rectam (§. 5.), aut $z' = z$, quo caſu ipſe Parallelus puncti Zenith reſultat, cuius proiectio eſt cir-

culus (§. 4.), aut denique $\text{coſ.}\,\Phi' = 0$. Paralleli itaque prope polum fiunt ellipſes maxime oblongae, eodemque caſu ratio axium fit $= \frac{m z + \text{ſin.}\,\beta'}{m z\,\text{ſin.}\,\beta' + 1}$ (§. 5.), quae poſito $\beta = 0$, ideoque $z = 1$, fit $= m$, ceteris autem caſibus multo minor. Cum itaque Parallelorum proiectiones ſemper minus a circulo differant quam Meridiani in telluris ſuperficie, in praxi loco Parallelorum tuto ſubſtituere poſſumus circulos, modo puncta principalia, puta ea, in quibus Parallelus axem
Fig. 10. H I et horizontem ſecat, fuerint determinata. Proiectio Paralleli M N axem ſecat in puncto m, horizontem autem in
Fig. 16. punctis quae reperiuntur, ſi in puncto c erigatur normalis ad planum P Z M. Sumatur itaque

$$\text{C}\,m = \frac{a z z'\,\text{ſin.}\,(\beta' - \Phi')}{z + z\,\text{coſ.}\,(\beta' - \Phi')}$$

(§. 3.) et $\text{C}\,c = \frac{a z'\,\text{ſin.}\,\Phi'}{\text{coſ.}\,\beta}$. In puncto c erigatur perpendicularis ad axem H I, quae ſi horizonti occurrat in punctis b, e, per b, m, e, ducatur circulus. Fiet hinc

$$\frac{\text{C}\,c}{a} = \frac{\text{C}\,c}{\text{C}\,b} = \text{coſ.}\,\text{I C}\,b = \frac{z'\,\text{ſin.}\,\Phi'}{\text{coſ.}\,\beta'} = \frac{x'}{\text{coſ.}\,\beta'},$$

denotante x' numerum, qui in tabulae columna x latitudini Φ reſpondere deprehenditur: unde facillima reſultat methodus, puncta b, e, inveniendi. Circulus nempe I b H e ordiendo ab I dividatur in ſuos gradus: tum vero, ſi Parallelus ſit proiiciendus, cuius latitudo $= \Phi$, quaeratur in tabula valor x latitudini Φ reſpondens, et capiatur arcus I b = I e tot graduum, quot competunt coſinui $= \frac{x}{\text{coſ.}\,\beta'}$, atque hoc modo horizon I b H e ſecundum latitudines dividi poteſt.

Evidens hinc eſt, angulum I C b fieri impoſſibilem, ſi $\text{coſ.}\,\beta' < x$, vel ſi $\text{coſ.}\,\beta' < \text{ſin.}\,\Phi'$, quoniam z quovis caſu parum ab unitate differt. Quoties itaque $\beta' + \Phi' > 90°$, Parallelus

rallelus horizonti non occurrit, quemadmodum circulus Ff: quod clarius ob oculos ponit Fig. 10. Parallelus ſcilicet puncti π integer intra mappae limites cadit, ſi $P\pi < Pr$, h. e. $90° - \Phi' < \beta'$, vel $\beta' + \Phi' > 90°$. Quare ſi $x = \text{coſ.}\, \beta'$, angulus ICb evaneſcit, ſeu Parallelus horizontem tangit in puncto I. Paralleli, quorum latitudo maior adhuc eſt, integri intra horizontis limites cadunt. Ceteri vero omnes horizontem ſecant. Si x vel $\Phi = 0$, ICb erit $= 90°$; quare normalis per ipſum centrum C tranſiens bina puncta interſectionis Aequatoris cum horizonte determinat. Quando x vel Φ valorem induunt negativum, fit $ICb > 90°$, donec iterum $x = - \text{coſ.}\, \beta'$, quo caſu Parallelus extra horizontem cadit eumque in puncto H tangit, ſimulque eſt limes Parallelorum, quorum proiectiones intra mappae limites cadunt.

Sumta $Cd = az\, \text{tang.}\, \beta'$ (§. 5.), normalis $D\delta$ erit proiectio Paralleli, cuius latitudo $= - \beta$. In proiectione ſphaerica linea centrorum Meridianorum DE (Fig. 15.) cum proiectione Paralleli, cuius latitudo $= - \beta$, coincidit; in elliptica ſecus. Eſt enim

$$Cd = az\, \text{tang.}\, \beta',$$

at ſupra erat CK (§. 8.)

$$= \alpha - CQ = \frac{amzz\, \text{coſ.}\, \beta'}{m^2 z^2 - \text{ſin.}^2 \beta'} - \frac{az\, \text{coſ.}\, \beta'}{mz + \text{ſin.}\, \beta'}$$
$$= \frac{az\, \text{ſin.}\, \beta' \,\text{coſ.}\, \beta'}{m^2 z^2 - \text{ſin.}^2 \beta'},$$

quae forma fit $= Cd$, ſi $mz = 1$ ponatur, unde patet, quam exigua ſit haec differentia.

Quando angulus Φ eſt negativus, capiatur

$$Cg = \frac{azz'\, \text{ſin.}\, (\beta' + \Phi')}{z + z'\, \text{coſ.}\, (\beta' + \Phi')}, \text{ et}$$
$$Cb = a\, \text{coſ.}\, HCG = \frac{-az'\, \text{ſin.}\, \Phi'}{\text{coſ.}\, \beta'},$$

ſeu coſ. H C G $= \frac{x'}{coſ.\ \beta'}$, ut ſupra, tumque per puncta G, g, γ, circulus deſcribatur.

Si $\beta + \Phi > 90^\circ$, fiat

$$CF = \frac{a z z'\ ſin.\ (\beta' - \Phi')}{z + z'\ coſ.\ (\beta' - \Phi')} \text{ et}$$

$$Cf = \frac{a z z'\ ſin.\ (\beta' + \Phi')}{z - z'\ coſ.\ (\beta' + \Phi')},$$

ac per puncta F, f, e medio lineae F f deſcribatur circulus.

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

MOTV OSCILLATORIO PENDVLI CIRCA AXEM CYLINDRICVM PLANO HORIZONTALI INCVMBENTEM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14 *Aug.* 1780.

§. 1.

Pendulum ſuperne traiectum concipiatur cylindro, qui vtroque termino plano horizontali incumbat, quod tantam frictionem opponat, vt nullus motus reptorius ſe admiſcere queat. Dum igitur tale pendulum oſcillationes peragit, cylindrus ſuper plano horizontali alternatim voluendo procedet et recedet, ſicque pendulum motu ſuo nullam aliam reſiſtentiam patietur praeter aërem. Quanquam autem talis motus iam ſaepius eſt tractatus, tamen hic praecipue in vires ſum inquiſiturus, quibus axis cylindricus planum horizontale inter oſcillandum premit, et quantam vim frictio exſerere debeat, vt motus reptorius penitus coërceatur.

§. 2. Sit igitur C centrum axis cylindrici, qui tempore quocunque, ab initio motus elapſo $= t$, plano horizontali QV in O incumbat, ita vt recta COP ſit verticalis. Nunc vero pendulum talem ſitum obliquum teneat, vt, ducta ex C Tab. V. Fig. 1.

ad eius centrum grauitatis G recta C G, angulus obliquitatis ſit O C G $= \Phi$. Ponamus porro radium axis cylindrici C O $= c$, diſtantiam centri grauitatis a puncto C, hoc eſt C G $= a$, maſſam ſeu pondus totius penduli $=$ M eiusque momentum inertiae reſpectu axis per G tranſeuntis et axi cylindri paralleli $= M k k$. Hinc ergo ducta horizontali G P et verticali G Q erit G P $=$ ſin. Φ, C P $= a$ coſ. Φ et G Q $= a$ coſ. $\Phi - c$.

§. 3. Hoc igitur penduli ſtatu erit arcus O A $= c\Phi$, cui in recta horizontali Q V aequale capiatur interuallum O A $= c\Phi$, eritque A punctum, vbi cylindrus initio motus, quo rectam C G verticalem fuiſſe aſſumemus, plano horizontali incumbebat, quod ergo punctum erit fixum, quippe a quo punctum O durante motu modo recedit modo accedit, atque adeo in contrariam partem excurrit, cui motui aequalis erit motus ipſius puncti C, quod in ſtatu penduli verticali ipſi puncto A imminebit et durante motu oſcillatorio ab hoc ſitu modo dextrorſum modo ſiniſtrorſum recedit, quem ergo motum, vna cum proprio motu penduli, accurate determinari oportet, vt totius motus perfectam cognitionem acquiramus. Euidens autem eſt hoc modo iſtum motum nondum eſſe exploratum.

§. 4. Cum igitur non punctum O ſed punctum A tanquam fixum ſpectari debeat, ad id ſitum puncti G referri conueniet per coordinatas A Q $= x$ et Q G $= y$, atque euidens eſt fore $x = a$ ſin. $\Phi - c\Phi$ et $y = a$ coſ. $\Phi - c$, vnde differentiando erit $\partial x = a \partial \Phi$ coſ. $\Phi - c \partial \Phi$ et $\partial y = - a \partial \Phi$ ſin. Φ, denuoque differentiando

$$\partial \partial x = a \partial \partial \Phi \text{ coſ. } \Phi - a \partial \Phi^2 \text{ ſin. } \Phi - c \partial \partial \Phi \text{ et}$$

$$\partial \partial y = - a \partial \partial \Phi \text{ coſ. } \Phi - a \partial \Phi^2 \text{ coſ. } \Phi,$$

vbi ſumto elemento temporis ∂t conſtante erit $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ celeritas angu-

angularis, qua pendulum a ſitu verticali recedit, et $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$ erit acceleratio huius motus angularis.

§. 5. His conſtitutis conſideremus vires, quibus pendulum hoc motu ſollicitatur. Ac primo quidem ob proprium pondus ſuſtinebit vim $= M$, cuius directio per ipſum centrum grauitatis G deorſum tendit. Deinde vero ob preſſionem axis cylindrici in planum horizontale QV vis aderit verticalis axem furſum ſecundum OC vrgens, quae vis, cum ſit adhuc incognita, ponatur $= \Pi$, in directione O C ſollicitans, haecque vis in ſtatu aequilibrii vtique aequaretur ponderi totius penduli, foretque $\Pi = M$; durante autem motu oſcillatorio mox videbimus, eam modo fore maiorem, modo minorem. Denique ne punctum O ſuper plano horizontali prorepat, neceſſe eſt vt in puncto O certa quadam vi horizontaliter vrgeatur, quae cum pariter ſit incognita, concipiamus eam in directione O C agere quantitate $= \Theta$, quae etiam erit variabilis atque ab ipſo motu penduli potiſſimum pendebit. Ad perfectam autem totius motus cognitionem plurimum intererit iſtas duas vires Π et Θ accurate inueſtigaſſe.

§. 6. Secundum praecepta igitur in Mechanica tradita primo inueſtigemus motum progreſſiuum centri grauitatis G, tum vero etiam motum gyratorium circa ipſum centrum grauitatis, quippe cui aequalis erit motus angularis circa punctum C. Motum autem progreſſiuum ſecundum binas directiones fixas coordinatarum x et y indagari oportet, vnde pro directione A Q, quia ſola vis Θ in ipſa hac directione agere aſſumitur, principia motus hanc ſuppeditant formulam: $\frac{\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = \frac{\Theta}{M}$, vbi g eſt altitudo lapſus grauium vno minuto ſecundo. Simili modo pro directione Q G habetur primo vis promouens, ſeu ipſum pondus $= M$, praeterea vero vis reagens $= \Pi$, vnde prodit

 $\partial\partial y$

$\frac{\partial \partial y}{2 g \partial t^2} = \frac{M - \Pi}{M} = 1 - \frac{\Pi}{M}$; pro hoc enim motu progreſſiuo definiendo omnes vires ipſi centro grauitatis G applicatae ſunt concipiendae. Subſtitutis igitur loco $\partial \partial x$ et $\partial \partial y$ valoribus aſſignatis, per differentialia ſecundi gradus binae vires incognitae Π et Θ ita determinabuntur:

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{a \partial \partial \Phi \,\text{ſin.}\, \Phi + a \partial \Phi^2 \,\text{coſ.}\, \Phi}{2 g \partial t^2},$$

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{a \partial \partial \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - a \partial \Phi^2 \,\text{ſin.}\, \Phi - c \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2}.$$

§. 7. Nunc ad motum angularem determinandum momenta virium reſpectu centri grauitatis G capi oportet, vnde quia primae vis, ſeu ponderis M, directio per ipſum centrum grauitatis tranſit, eius momentum erit nullum. Secunda vis Π, in directione OC agens, momentum habebit $\Pi . GP$, quod ergo erit $\Pi a \,\text{ſin.}\, \Phi$, et quia huius vis actione angulus Φ minuetur, eius momentum negatiue ſumi debet. Tertia vis Θ in directione OQ agens momentum dabit

$$\Theta . GQ = \Theta (a \,\text{coſ.}\, \Phi - c),$$

cuius actione pariter angulus Φ minuetur, ideoque negatiue accipi oportet. Quoniam igitur momentum virium per momentum inertiae diuiſum praebet accelerationem angularem, inde orietur iſta aequatio:

$$\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = - \frac{\Pi a \,\text{ſin.}\, \Phi - \Theta (a \,\text{coſ.}\, \Phi - c)}{M k k},$$

hocque modo nacti ſumus tres aequationes, ex quibus non ſolum ad quoduis tempus angulus Φ, ſed etiam ambae vires incognitae Π et Θ definiri debebunt.

§. 8. Subſtituamus nunc loco $\frac{\Pi}{M}$ et $\frac{\Theta}{M}$ valores modo ante aſſignatos, et multiplicando per $2 g k k \partial t^2$ reſultabit ſequens aequatio:

$$kk\,\partial\partial\Phi = -2ag\,\partial t^2 \text{ſin.}\,\Phi - (aa+cc)\,\partial\partial\Phi + 2ac\,\partial\partial\Phi \text{ coſ.}\,\Phi - ac\,\partial\Phi \text{ ſin.}\,\Phi,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\partial\partial\Phi(kk+aa+cc-2ac \text{ coſ.}\,\Phi) + ac\,\partial\Phi^2 \text{ ſin.}\,\Phi = -2ag\,\partial t^2 \text{ ſin.}\,\Phi,$$

haecque aequatio commode integrabilis redditur, ſi modo multiplicetur per $2\,\partial\Phi$; tum enim integrale reperitur:

$$\partial\Phi^2(kk+aa+cc-2ac \text{ coſ.}\,\Phi) = 4ag\,\partial t^2 \text{ coſ.}\,\Phi + C\,\partial t^2.$$

§. 9. Quia $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ exprimit celeritatem angularem, aequatio inuenta, per ∂t^2 diuiſa, erit:

$$\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2}(kk+aa+cc-2ac \text{ coſ.}\,\Phi) = C + 4ag \text{ coſ.}\,\Phi,$$

vbi ad conſtantem rite determinandam conſideretur maxima penduli excurſio a ſitu verticali, quae fiat per angulum $=\zeta$, et cum in hoc ſitu celeritas prorſus euaneſcat, conſtans C erit ita definienda, vt poſito $\Phi=\zeta$ fiat $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$, ex qua conditione conſtans iſta per integrationem ingreſſa ita definietur, vt ſit $C = -4ag \text{ coſ.}\,\zeta$, ſicque noſtra aequatio motum penduli determinans erit

$$\partial\Phi^2(kk+aa+cc-2ac \text{ coſ.}\,\Phi) = 4ag\,\partial t^2(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\zeta),$$

ex qua aequatione ad quoduis tempus t ſtatus penduli definiri poterit. Cum enim radice extracta hinc prodeat

$$\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(kk+aa+cc-2ac \text{ coſ.}\,\Phi)}}{2\sqrt{ag(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\zeta)}},$$

determinatio totius motus perducta eſt ad integrationem iſtius formulae differentialis. Inuento autem eius integrali tempus ſtatim in minutis ſecundis expreſſum reperitur, vnde ſi eius integrale a termino $\Phi=0$ vsque ad terminum $\Phi=\zeta$ extendatur, habebitur tempus vnius ſemi-oſcillationis penduli, cuius ergo duplum dabit tempus vnius oſcillationis.

§. 10. Facile autem patet iſtud integrale in genere aliter exhiberi non poſſe, niſi praefixo ſigno integrationis: erit igitur tempus vnius dimidiae oſcillationis

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ag}} \int \frac{\sqrt{(kk + aa + cc - 2ac\,\mathrm{cof.}\,\Phi)}}{\sqrt{(\mathrm{cof.}\,\Phi - \mathrm{cof.}\,\zeta)}} \cdot \partial\Phi \left[\begin{matrix} \mathrm{a} & \Phi = 0 \\ \mathrm{ad} & \Phi = \zeta \end{matrix}\right].$$

Verum ſi oſcillationes fuerint valde paruae, iſtud tempus facile ad quadraturam circuli reuocatur, quem ergo caſum hic accuratius euoluamus. Cum ſit $\mathrm{cof.}\,\Phi = 1 - 2\,\mathrm{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2$, ſimilique modo $\mathrm{cof.}\,\zeta = 1 - 2\,\mathrm{fin.}\,\frac{1}{2}\zeta^2$, ponamus $\mathrm{fin.}\,\frac{1}{2}\zeta = b$ et $\mathrm{fin.}\,\frac{1}{2}\Phi = s$, vt ſit $\mathrm{cof.}\,\zeta = 1 - 2bb$ et $\mathrm{cof.}\,\Phi = 1 - 2ss$, tum vero erit $\partial\Phi = \frac{2\partial s}{\sqrt{(1 - ss)}}$. Quod ſi iam breu. gr. ſtatuamus $kk + (a - c)^2 = bb$ formula noſtra induet hanc formam:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2ag}} \int \frac{\partial s \sqrt{(bb + 4acss)}}{\sqrt{(1 - ss)(bb - ss)}},$$

vbi notetur eſſe b quantitatem valde paruam, et tempus ſemi-oſcillationis repertum iri, ſi integrale ab $s = 0$ vsque ad $s = b$ extendatur.

§. 11. Cum igitur b reſpectu vnitatis ſit fractio valde exigua, et variabilis s fractionem b nunquam excedere queat, proxime erit

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - ss)}} = 1 + \tfrac{1}{2}ss \text{ et}$$

$$\sqrt{(bb + 4acss)} = b + \frac{2acss}{b},$$

ex his valoribus erit

$$t = \frac{1}{\sqrt{2ag}} \int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} \left(b + \frac{4ac + bb}{2b} ss\right),$$

ſicque integrale conſtat ex duabus partibus, quarum poſterior prae priore eſt quaſi infinite parua ideoque ita repraeſentari poteſt:

$$t = \frac{b}{\sqrt{2ag}} \int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} + \frac{4ac + bb}{2b\sqrt{2ag}} \int \frac{ss\,\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}},$$

vbi manifeſtum eſt eſſe $\int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb - ss)}} = \mathrm{A\,fin.}\,\frac{s}{b}$, vnde, ſumto

$s = b$, pro vna ſemi-oſcillatione erit $\int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb-ss)}} = \frac{\pi}{2}$. Praeterea facile patet eſſe

$$\int \frac{ss\partial s}{\sqrt{(bb-ss)}} = -\tfrac{1}{2} s \sqrt{(bb-ss)} + \tfrac{1}{2} bb \int \frac{\partial s}{\sqrt{(bb-ss)}}.$$

Hinc ergo ſumto $s = b$ erit iſtud integrale $= \frac{\pi bb}{4}$, quocirca tempus vnius dimidiae oſcillationis erit

$$t = \frac{b\pi}{2\sqrt{2ag}} + \frac{\pi bb(4ac+bb)}{8b\sqrt{2ag}},$$

ideoque tempus integrae oſcillationis

$$= \frac{\pi b}{\sqrt{2ag}} + \frac{\pi bb(4ac+bb)}{4b\sqrt{2ag}}.$$

Vnde patet, quo maiores fuerint penduli excurſiones, tempora oſcillationum eo maiora incrementa accipere.

§. 12. Quodſi ponamus axem cylindricum infinite eſſe gracilem, ita vt ſit $c = 0$, durante motu oſcillatorio punctum C immotum manebit, et habebitur caſus penduli vulgaris; tum igitur erit $bb = kk + aa$ et tempus vnius oſcillationis fiet $\frac{\pi\sqrt{(kk+aa)}}{\sqrt{2ag}} + \frac{\pi bb\sqrt{(kk+aa)}}{4\sqrt{2ag}}$. Quodſi praeterea fuerit $kk = 0$, ſiue corpus oſcillans infinite paruum, habebitur caſus penduli ſimplicis, longitudinis $CG = a$, pro quo ergo tempus oſcillationis erit $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{\pi bb\sqrt{a}}{4\sqrt{2g}}$, vnde viciſſim tempora omnium oſcillationum ad pendulum ſimplex reduci poterunt, ſiue ſemper hinc longitudo penduli ſimplicis aſſignari poterit, quod eodem tempore oſcillationes ſuas peragat.

Inueſtigatio virium Π & Θ.

§. 13. Valores harum virium iam ſupra per differentialia ſecundi gradus expreſſos dedimus:

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2g\partial t^2 + a\partial\partial\Phi \sin.\Phi + a\partial\Phi^2 \cos.\Phi}{2g\partial t^2},$$

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{a\partial\partial\Phi \cos.\Phi - a\partial\Phi^2 \sin.\Phi - c\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2},$$

vnde tantum opus eſt, vt iſta differentialia ad quantitates finitas

tas reuocentur. Iam vero ex integratione generali §. 9. colligitur fore

$$\frac{\partial\Phi^2}{2g\,\partial t^2} = \frac{2a(\mathit{coſ.}\,\Phi - \mathit{coſ.}\,\zeta)}{kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi};$$

ex aequatione autem differentiali ſecundi gradus ſupra inuenta fiet

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{-ac\,\partial\Phi^2\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{2g\,\partial t^2(kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi)} - \frac{a\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi},$$

vnde per meras quantitates finitas erit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{-2aac\,\mathit{ſin.}\,\Phi(\mathit{coſ.}\,\Phi - \mathit{coſ.}\,\zeta)}{(kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi)^2} - \frac{a\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi},$$

ſiue

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = \frac{-(kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\zeta)\,a\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{(kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi)^2},$$

quae expreſſiones cum ſint ſatis complicatae, ponamus br. gr. $\frac{\partial\Phi^2}{2g\,\partial t^2} = \mathrm{R}$ et $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = -\mathrm{S}$. Ita vt ſit

$$\mathrm{R} = \frac{2a(\mathit{coſ.}\,\Phi - \mathit{coſ.}\,\zeta)}{kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi} \text{ et}$$

$$\mathrm{S} = \frac{a(kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\zeta)\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{(kk+aa+cc-2ac\,\mathit{coſ.}\,\Phi)}.$$

§. 14. His ergo valoribus ſubſtitutis erit per meras quantitates finitas.

$$\frac{\Pi}{\mathrm{M}} = 1 - a\,\mathrm{S}\,\text{ſin.}\,\Phi + a\,\mathrm{R}\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

$$\frac{\Theta}{\mathrm{M}} = \mathrm{S}(c - a\,\text{coſ.}\,\Phi) - a\,\mathrm{R}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

vnde patet durante motu oſcillatorio has vires continuo variari. Hinc ergo primo quaeramus iſtas vires pro ſitu penduli verticali, vbi $\Phi = 0$, ac reperietur fore $\frac{\Pi}{\mathrm{M}} = 1 + a\mathrm{R}$ et $\frac{\Theta}{\mathrm{M}} = (c - a)\,\mathrm{S}$. Hoc autem caſu fit $\mathrm{R} = \frac{2a(1-\mathit{coſ.}\,\zeta)}{kk+(a-c)^2}$ et $\mathrm{S} = 0$, conſequenter pro ſitu verticali erit

$$\frac{\Pi}{\mathrm{M}} = 1 = \frac{2aa(1-\mathit{coſ.}\,\zeta)}{kk+(a-c)^2},$$

$$\frac{\Theta}{\mathrm{M}} = 0;$$

vnde patet hoc ſitu preſſionem eſſe maiorem quam pondus.

§. 15.

§. 15. At vero pro excurſionibus maximis, vbi $\Phi = \zeta$, habebimus $R = 0$ et

$$S = \frac{a \sin. \zeta}{kk + aa + cc - 2ac \cos. \zeta}$$

hincque pro hoc ſtatu reperitur $\frac{\Pi}{M} = 1$, ſiue preſſio ipſi ponderi exacte eſt aequalis. Deinde erit

$$\frac{\Theta}{M} = \frac{-a(a-c)\sin. \zeta}{kk + aa + cc - 2ac \cos. \zeta},$$

vnde patet iſtam vim non in plagam O A, vti finximus, ſed in plagam contrariam A V eſſe directam, cui ergo coërcendae frictio ſuper plano horizontali maior eſſe debet. Ceterum ex noſtris formulis haud difficile erit pro quouis penduli ſtatu medio ambas vires Π et Θ aſſignare, quae autem ſecundum nullam legem ſimplicem repraeſentari poſſunt.

DE MOTV PROGRESSIVO, ROTATORIO ET OSCILLATORIO DVORVM CORPORVM OPE FILI SVPER TROCHLEAM TRANSEVNTIS CONNEXORVM.

Auctore
IACOBO BERNOVLLI.

Conuent. exhib. die 18 *Febr.* 1788.

§. 1.

Tab. V. Fig. 2. Sint duo corpora M et N, ope fili ſuper trochleam A tranſeuntis, connexa; filum autem, cuius craſſities negligitur, circumuoluatur in plano verticali, per centra grauitatis corporum tranſeunte, circa axem, ſiue potius cylindrum horizontalem *a c* corporis M, et ex altera parte circa ſimilem cylindrum corporis N: aut, quo facilius motus, quem intendimus, intelligatur, concipiamus vtrumque corpus a plano verticali, per centrum grauitatis tranſeunte, in duas partes aequales et ſimiles ſecari, ad quamcunque ab iſto centro diſtantiam eminere vtrinque cylindrum horizontalem, cui bina circumuoluantur fila ad aequales a praefato plano diſtantias, eaque cum ſuper binas trochleas aequales et ſimiliter poſitas tranſierint, inde porro ſimili modo cylindro alterius corporis circumuoluantur; appa-

apparet, exinde eundem plane conſecuturum eſſe motum, ac eum, quem conſiderare animus eſt; tenſionemque vtriusque fili ſimul ſumti aequalem fore tenſioni vnici fili, quod in priori enunciatione indicauimus. Quaeritur iam, quis igitur futurus ſit motus, ſi vtrumque corpus ſibi ipſi, actionique vnius in alterum derelinquatur?

§. 2. Patet ſtatim, praeter deſcenſum verticalem vnius aſcenſumque alterius corporis, motum rotatorium circa cylindros, atque motum reciprocantem oſcillatorium locum habiturum eſſe. Has vero oſcillationes quam minimas ſtatuere erit neceſſe, quum in aliis huius naturae problematibus, minus compoſitis, calculus ita intricatus euadat, vt geometrae ad hanc ſuppoſitionem ſe viderint conſtrictos. Sic etiam ſimplicioris calculi cauſa ab omni frictione fili animum abſtrahemus, radiosque cylindrorum ſat paruos ponemus.

§. 3. Sit nunc radius cylindri $a c = a$, diſtantia eius centri a centro grauitatis b, quae ob oſcillationes minimas etiam ſatis parua aſſumenda eſt, $= b$, verticalis $AP = x$, $Pc = y$, ideoque $Pa = a + y$, $AQ = ab = p$, $Qb = q$, ideoque $PQ = p - x$ et $bR = q - a - y = \sqrt{bb - (p - x)^2}$, vbi memores nos eſſe oportet, q aeque ac a, b et y, eſſe quam minimam, ſpatium grauitate naturali tempore vnius minuti ſecundi deſcriptum $= g$, maſſa corporis $M = M$, eiusque momentum inertiae reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis tranſeuntis et ad planum figurae perpendicularis $= Mkk$, angulus tempore t circa b deſcriptus, aequalis illi, qui circa a deſcribitur, $= \Phi$, tenſioque fili tandem $= \Pi$. Quibus poſitis, habentur ſequentes aequationes:

I. $\frac{\partial \partial p}{2 g \partial t^2} = 1 - \frac{\Pi}{M}$,

pro motu verticali centri grauitatis corporis M: (conſtat enim

 ex

ex Mechanica, quoad motum progreſſiuum centri grauitatis, tenſionem fili A c eundem effectum praeſtare, ac ſi in eadem directione verticali, aut quaſi verticali, ipſi centro grauitatis applicetur).

II. $\frac{\partial \partial q}{2 g \partial t^2} = \frac{-\Pi}{M} \times \frac{y}{x}$,

pro motu laterali ſiue horizontali eiusdem.

III. $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = \frac{\Pi (q - y)}{M k k}$,

pro motu rotatorio corporis circa id ipſum. Cum porro diſtantia b Q creſcat elemento ∂q, diſtantia a P creſcet elemento $\frac{x}{p} \partial q$; at ob motum rotatorium circa b haec diſtantia a P aliud inſuper capiet incrementum

$$b \partial \Phi \times \text{ſin.}\, a b \text{R} = \partial \Phi (p - x), \text{ vnde}$$

IV. $\partial (a + y) = \partial y = \partial \Phi (p - x) + \frac{x}{p} \partial q$;

denique eſt, vt iam vidimus,

V. $q - a - y = \sqrt{b b - (p - x)^2}$.

Deſignando nunc pro altero corpore per litteras N, Nff, α, β, ξ, υ, π, ϱ, ψ quantitates analogas cum iis, quas pro priore per M, Mkk, a, b, x, y, p, q, et Φ indicauimus, erit eodem modo:

VI. $\frac{\partial \partial \pi}{2 g \partial t^2} = 1 - \frac{\Pi}{N}$;

VII. $\frac{\partial \partial \varrho}{2 g \partial t^2} = \frac{-\Pi}{N} \cdot \frac{\upsilon}{\xi}$;

VIII. $\frac{\partial \partial \psi}{2 g \partial t^2} = \frac{\Pi (\varrho - \upsilon)}{N f f}$;

IX. $\partial \upsilon = \partial \psi (\pi - \xi) + \frac{\xi}{\pi} \partial \varrho$;

X. $\varrho - \alpha - \upsilon = \sqrt{\beta \beta - (\pi - \xi)^2}$.

Quum tandem longitudo fili extenſi creſcat pro ratione euolutionis cylindrorum, erit

XI.

XI. $a\partial\Phi + \alpha\partial\psi = \partial x + \partial\xi.$

His itaque vndecim aequationibus, duodecim variabiles x, y, p, q, Φ, ξ, υ, π, ϱ, ψ, Π et t, continentibus tota quidem problematis noſtri ſolutio phyſica comprehenditur, idque ad problema omnino analyticum reduximus, quod autem, nimis multis variabilibus adhuc intricatum longe vires noſtras ſuperare fatendum, ideoque, vt illud aggredi liceat, magis reſtringendum eſt.

§. 4. Ponamus igitur, centrum cylindri a cum ipſo centro grauitatis b coincidere, idemque pro altero corpore N obtinere: ex quo fiet ſtatim $b = 0$, $\beta = o$, $x = p$, $\xi = \pi$, $y = q - a$, $\upsilon = \varrho - \alpha$; hisque ſeptem aequationibus problematis ſolutio continebitur:

I. $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = 1 - \frac{\Pi}{M}$;

II. $\frac{\partial\partial\xi}{2g\partial t^2} = 1 - \frac{\Pi}{N}$;

III. $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{\Pi a}{Mkk}$;

IV. $\frac{\partial\partial\psi}{2g\partial t^2} = \frac{\Pi\alpha}{Nff}$;

V. $\frac{\partial\partial y}{2g\partial t^2} = -\frac{\Pi y}{Mx}$;

VI. $\frac{\partial\partial\upsilon}{2g\partial t^2} = -\frac{\Pi\upsilon}{N\xi}$;

VII. $a\partial\Phi + \alpha\partial\psi = \partial x + \partial\xi.$

§. 5. Eſt iam per $\frac{III}{IV}$, $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial\partial\psi} = \frac{Naff}{M\alpha kk}$, vnde, negligendo vtramque conſtantem in duplici integratione, quoniam motus rotatorius cylindrorum, eorumque anguli Φ et ψ ſimul initium ſumere cenſentur, fit $\partial\psi = \frac{M\alpha k^2\partial\Phi}{Naff}$, et $\psi = \frac{M\alpha kk\Phi}{Naff}$, ideoque aequatio VII mutatur in hanc alteram:

$$\left(\frac{Na^2f^2 + M\alpha^2k^2}{Naf^2}\right)\partial\Phi = \partial x + \partial\xi.$$

Ex aequatione $\psi = \frac{M\alpha k^2\Phi}{Naf^2}$ iam perſpicitur, angulos Φ et ψ ſem-

ſemper conſtantem inter ſe ſeruare rationem, parteſque fili eodem tempore t ab vtroque cylindro euolutas eſſe

$$:: [\alpha\Phi : \alpha\psi] :: N a^2 f^2 :: M \alpha^2 k^2,$$

id eſt in ratione directa duplicata radiorum a et α, et inuerſa ſimplici momentorum inertiae $M k^2$ et $N f^2$.

§. 5. Aequationes I. et II., eliminando litteram Π, dant $\frac{\partial\partial x}{2 g \partial t^2} = 1 - \frac{k^2 \partial\partial\Phi}{2 g a \partial t^2}$, ſiue $\partial\partial\Phi = \frac{2 g a \partial t^2}{k k} - \frac{a \partial\partial x}{k k}$, vnde, negligendo denuo conſtantem, quia omnis motus ſimul naſci ponitur, proueniet $\partial\Phi = \frac{2 g a t \partial t}{k k} - \frac{a \partial x}{k k}$.

Eodem modo ex aequationibus II. et III. deriuabitur:

$$\frac{\partial\partial\xi}{2 g \partial t^2} = 1 - \frac{M k^2 \partial\partial\Phi}{2 g N a \partial t^2} = 1 - \frac{M}{N} + \frac{M \partial\partial x}{2 g N \partial t^2},$$

vnde

$$\partial\xi = 2 g (1 - \tfrac{M}{N}) t \partial t + \tfrac{M}{N} \partial x.$$

Subſtituendo nunc valores ipſarum $\partial\Phi$ et $\partial\xi$, aequatio VII. denuo mutatur in hanc:

$$\left(\frac{N a^2 f^2 + M \alpha^2 k^2}{N a f^2}\right)\left(\frac{2 g a t \partial t - a \partial x}{k k}\right) = \partial x (1 + \tfrac{M}{N}) + 2 g (1 - \tfrac{M}{N}) t \partial t,$$

vnde, ponendo $\frac{N a^2 f^2 + M \alpha^2 k^2}{N f^2 k^2} = m$, habetur:

$$m g t t - m x = x (1 + \tfrac{M}{N}) + g t t (1 - \tfrac{M}{N}) - A,$$

ſiue

$$x = A + g t t \left(\frac{m - 1 + \frac{M}{N}}{m + 1 + \frac{M}{N}}\right) = A + n g t t,$$

faciendo $\frac{m - 1 + \frac{M}{N}}{m + 1 + \frac{M}{N}} = n$. Conſtans vero A aequalis eſt longitudini initiali fili extenſi a parte ſiniſtra trochleae, quoniam, poſito $t = 0$, fit $x = A$. Quod ſi etiam longitudo initialis fili

fili pro parte dextra ſit $= B$, habebitur:

$$\xi = g\,t\,t\,(1 - \tfrac{M}{N}) + \tfrac{M}{N}\,(x - A) + B,\text{ ſiue}$$

$$\xi = B + g\,t\,t\,(1 - \tfrac{M}{N} + \tfrac{M\,n}{N}).$$

§. 7. Ex praecedenti §6. fiet

$$\Phi = \frac{g\,a\,t\,t - a\,(x - A)}{k\,k} = \frac{g\,a\,t\,t\,(1 - n)}{k\,k},$$

quia pro $t = 0$, $\Phi = 0$. At

$$\psi = \frac{M\,\alpha\,k^2\,\Phi}{N\,a\,f^2} = \frac{M\,g\,\alpha\,t\,t\,(1 - n)}{N\,f^2}.$$

Ex aequatione III. tandem inuenitur

$$\Pi = \frac{M\,k^2\,\partial\partial\Phi}{2\,g\,\partial t^2} = M\,(1 - n).$$

§. 8. Quamuis igitur littera n ſit expreſſio ſatis complicata, videmus tamen, tenſionem fili durante motu conſtantem manere, motumque progreſſiuum verticalem aeque ac rotatorium fieri vniformiter acceleratum; ac intenſitatem actionis eſſe ad grauitatem naturalem, pro motu verticali corporis M, vt $n : 1$, et pro motu rotatorio vt $1 - n : 1$. Quae duae actiones n et $1 - n$ ſimul ſumtae totam grauitatem naturalem 1 exhauriunt, id quod conforme eſt principio conſeruationis virium; motus enim oſcillatorius, vtpote infinite paruus, et infinite paruas vires exigens, nequaquam hic in cenſum venire poteſt. Recte autem aſſerta noſtra ſe habere, apparet quoque ex Corollario. Ponantur enim axes cylindrorum a et $\alpha = 0$, fit $m = 0$, et $n = \dfrac{\frac{M}{N} - 1}{\frac{M}{N} + 1} = \dfrac{M - N}{M + N}$. Conſtat vero, in hac ratione minui vim acceleratricem corporum libere cadentium, ſi bina ope fili ſuper trochleam tranſeuntis coniungantur, nec a ſitu verticali diuellantur. Ex quo porro manifeſtum eſt, motum verticalem aeque ac rotatorium minime a motu hori-

zon-

zontali ſiue oſcillatorio, qualiscunque is futurus ſit, affici; quando nimirum oſcillationes ſint infinite paruae. Iam tempus eſt, vt pergamus ad motum iſtum oſcillatorium indagandum. Quod enim hucusque de motu corporis M dictum fuit, ac in ſequentibus dicetur, eius facillima fit applicatio ad motum corporis N, nec eſt operae pretium, vt ipſi immoremur.

§. 9. Quinta noſtra aequatio haec fuit:

$$\frac{\partial \partial y}{2 g \partial t^2} = - \frac{\Pi y}{M x},$$

vbi pro Π et x valores ſupra inuentos ſubſtituamus, vnde fit:

$$\frac{\partial \partial y}{2 g \partial t^2} = - \frac{(1-n) y}{A + n g t t}, \text{ ſiue}$$

$$A \partial \partial y + n g t t \partial \partial y + 2 g (1-n) y \partial t^2 = 0.$$

Haec aequatio autem ita infauſta eſt, vt omnes conatus ad eius integrationem inſtituti et inſtituendi inutiles videantur; quamuis enim facile ope ſubſtitutionis ad aequationem differentialem primi gradus reduci queat, nihil inde ſubſidii nobis affertur; imo aequatio inde reſultans minus idonea videtur, ex qua ideam quandam motus deſiderati hauriamus, quam ipſa aequatio differentio-differentialis, quam hic exhibuimus.

§. 10. Quaeramus igitur integrationem per ſeriem infinitam ſecundum poteſtates ipſius t progredientem, quamuis ea pro primis tantummodo motus momentis vſum praeſtare poſſit; deinde vero, cum t in infinitum creſcat, mox diuergens ac inutilis fiat. Quoniam tempus in aequatione differentiali ad ſecundam poteſtatem aſſurgit, poteſtates temporum in ſerie etiam ſecundum quadrata creſcent, vnde fiat

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} t^{\lambda} + \mathfrak{C} t^{\lambda+2} + \mathfrak{D} t^{\lambda+4} + \mathfrak{E} t^{\lambda+6} + \text{etc.},$$

erit

∂y

$$\partial y = \lambda \mathfrak{B} t^{\lambda-1} \partial t + (\lambda+2) \mathfrak{C} t^{\lambda+1} \partial t + (\lambda+4) \mathfrak{D} t^{\lambda+3} \partial t + (\lambda+6) \mathfrak{E} t^{\lambda+5} \partial t + \text{etc.}$$

et

$$\partial \partial y = \lambda (\lambda-1) \mathfrak{B} t^{\lambda-2} \partial t^2 + (\lambda+2)(\lambda+1) \mathfrak{C} t^{\lambda} \partial t^2 + (\lambda+4)(\lambda+3) \mathfrak{D} t^{\lambda+2} \partial t^2 + \text{etc.}$$

qui valores in aequatione ſubſtituti eam ſequenti modo immutabunt, ſtatim per ∂t^2 diuidendo:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(\lambda-1) A \mathfrak{B} t^{\lambda-2} + (\lambda+2)(\lambda+1) A \mathfrak{C} t^{\lambda} + (\lambda+4)(\lambda+3) A \mathfrak{D} t^{\lambda+2} + \text{etc.} \\ \qquad + \lambda(\lambda-1) n g \mathfrak{B} t^{\lambda} + (\lambda+2)(\lambda+1) n g \mathfrak{C} t^{\lambda+2} + \text{etc.} \\ + 2g(1-n)\mathfrak{A} + 2g(1-n)\mathfrak{B} t^{\lambda} + 2g(1-n)\mathfrak{C} t^{\lambda+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Poſitis nunc omnibus terminis, in quibus t ad eandem poteſtatem aſſurgit, ſeorſim $= 0$, erit $2g(1-n)\mathfrak{A} = 0$, ideoque $\mathfrak{A} = 0$; deinde $\lambda(\lambda-1) A \mathfrak{B} t^{\lambda-2} = 0$, cui ſatisfaciunt bini valores ipſius λ, ſcilicet 0 et 1, ita vt y componatur ex his binis ſeriebus, integrale completum conſtituentibus:

$$y = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} t^2 + \mathfrak{D} t^4 + \mathfrak{E} t^6 + \text{etc.}$$
$$+ \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' t^3 + \mathfrak{D}' t^5 + \mathfrak{E}' t^7 + \text{etc.}$$

in quibus coëfficientes porro ſic determinantur: $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ reſtant arbitrariae, et repraeſentant vtramque conſtantem per duplicem integrationem introducendam. Erit autem pro $\lambda = 0$, $2.1 A \mathfrak{C} + 2g(1-n)\mathfrak{B} = 0$, vnde $\mathfrak{C} = \frac{-g(1-n)\mathfrak{B}}{A}$, et pro $\lambda = 1$, $3.2 A \mathfrak{C}' + 2g(1-n)\mathfrak{B}' = 0$, vnde $\mathfrak{C}' = \frac{-g(1-n)\mathfrak{B}'}{1.3A}$. Eodem modo habetur

$$4.3 A \mathfrak{D} + 2.1 n g \mathfrak{C} + 2g(1-n)\mathfrak{C} = 0,$$

vnde

$$\mathfrak{D} = \frac{-g\mathfrak{C}}{1.2.3A} = \frac{g^2(1-n)\mathfrak{B}}{1.2.3A^2},$$

itidemque

$$\mathfrak{D}' = \frac{-g(1+2n)\mathfrak{C}'}{1.2.5\,A} = \frac{g^2(1-n)(1+2n)\mathfrak{B}'}{1.2.3.5\,A^2}.$$

Porro

$$\mathfrak{E} = \frac{-g(1+5n)\mathfrak{D}}{1.3.5\,A} = \frac{-g^3(1-n)(1+5n)\mathfrak{B}}{1.2.3.3.5\,A^3},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{-g(1+14n)\mathfrak{E}}{1.4.7\,A} = \frac{g^4(1-n)(1+5n)(1+14n)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.3.5.7\,A^4},$$

$$\mathfrak{G} = \frac{-g(1+27n)\mathfrak{F}}{1.5.9\,A} = \frac{-g^5(1-n)(1+5n)(1+14n)(1+27n)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.5.3.5.7.9\,A^5},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{-g(1+44n)\mathfrak{G}}{1.6.11\,A} = \frac{g^6(1-n)(1+5n)(1+14n)(1+27n)(1+44n)\mathfrak{B}}{1.2.3.4.5.6.3.5.7.9.11\,A^6},$$

etc.

Apparet iam, coëfficientes iſtos certam quidem legem obſeruare, quam autem non niſi poſt maiorem eorum numerum tuto obſeruare licet, quem hic vlterius proſequi operae non videtur pretium. Quod ad coëfficientes ſeriei ſecundum poteſtates impares ipſius t procedentis attinet, eas adhuc magis quaeſiuiſſe pro praeſenti propoſito ſuperuacaneum foret, quoniam tota iſta ſeries negligi poteſt. Cum enim $\frac{\partial y}{\partial t}$ indicet velocitatem oſcillatoriam corporis, quam initio, cum $t = 0$, etiam nihilo aequalem fuiſſe ponimus, ſequitur inde $\mathfrak{B}'$ fieri $= 0$, idemque omnibus reliquis poſterioris huius ſeriei coëfficientibus euenire; vnde valor ipſius y hac vnica ſerie repraeſentatur:

$$y = \mathfrak{B} - \frac{g(1-n)\mathfrak{B}tt}{A} + \frac{g^2(1-n)\mathfrak{B}t^4}{1.2.3.5\,A^2} - \frac{g^3(1-n)(1+5n)\mathfrak{B}t^6}{1.2.3.3.5\,A^3}$$
$$+ \frac{g^4(1-n)(1+5n)(1+14n)\mathfrak{B}t^8}{1.2.3.4.3.5.7\,A^4} - \frac{g^5(1-n)(1+5n)(1+14n)(1+27n)\mathfrak{B}t^{10}}{1.2.3.4.5.3.5.7.9\,A^5}$$
$$+ \frac{g^6(1-n)(1+5n)(1+14n)(1+27n)(1+44n)\mathfrak{B}t^{12}}{1.2.3.4.5.6.3.5.7.9.11\,A^6} - \text{etc.}$$

vbi, cum $y = \mathfrak{B}$, quando $t = 0$, ſi elongatio initialis a verticali vocetur $= c$, determinatur $\mathfrak{B}$ ita, vt ſit $\mathfrak{B} = 0$. Vt vero applicata y per ipſam abſciſſam x exprimatur, ſubſtitui nunc poteſt pro tt illius valor $= \frac{x - A}{gn}$, et proueniet aequatio:

$y =$

$$y = c - \frac{(1-n)(x-A)c}{nA} + \frac{(1-n)(x-A)^2 c}{1.2.3\,n^2 A^2}$$
$$- \frac{(1-n)(1+5n)(x-A)^3 c}{1.2.3.3.5\,n^3 A^3} + \text{etc.}$$

§. 11. Quod ſi nunc fiat $n = 0$, ita vt $x = A$, qui caſus eueniet, quando corpus M ab actione alterius corporis per tantum ſpatium ſurſum trahitur, quantum fili ex ratione ipſius euoluitur, ſeries poſterior in hanc aliam transformatur:

$$y = c - \frac{0.c}{0.A} + \frac{0^2.0}{1.2.3.0^2.A^2} - \text{etc.}$$

quae nihil nos docere poteſt. Prior autem, poſito quoque c pro $\mathfrak{B}$, hanc formam induit:

$$y = c - \frac{gctt}{A} + \frac{g^2 c t^4}{1.2.3\,A^2} - \frac{g^3 c t^6}{1.2.3.3.5\,A^3} + \frac{g^4 c t^8}{1.2.3.4.3.5.7\,A^4} - \text{etc.}$$

Cum in omnibus his ſeriebus littera a non occurrat, patet motum oſcillatorium eundem plane eſſe, ſiue ille cum motu rotatorio coniunctus ſit, ſiue, poſito $a = 0$, motus rotatorius deficiat. Eſt vero manifeſtum, hoc caſu ſpeciali, cum $n = 0$, ideoque haud $M = N$ ſed

$$M k^2 (a^2 + f^2) = N f^2 (k^2 - a^2),$$

et $x = A$, motum verticalem plane ceſſare, et oſcillationes ſimplices minimas per arcus circulares fieri. Notum eſt deinde, pro iis, easdem denominationes adhibendo, hanc aequationem locum habere: $\partial t = \frac{-\partial y \sqrt{A}}{\sqrt{2g(cc - yy)}}$, ideoque $t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \times A\,.\,\text{coſ.}\,\frac{y}{c}$, ſiue reciproce $y = c \times \text{coſ.}\, t \sqrt{\frac{2g}{A}}$. Aequando nunc binos valores ipſius y per diuerſas methodos inuentos, fit

$$y = c \times \text{coſ.}\, t \sqrt{\frac{2g}{A}} = c - \frac{gct^2}{A} + \frac{g^2 c t^4}{1.2.3\,A^2} - \frac{g^3 c t^6}{1.2.3.3.5\,A^3}$$
$$+ \frac{g^4 c t^8}{1.2.3.4.3.5.7\,A^4} - \text{etc.}$$

et, diuidendo per c, et faciendo $t\sqrt{\frac{2g}{A}} = T$, ſiue $tt = \frac{ATT}{2g}$,

$$\text{coſ.}\, T = 1 - \frac{TT}{1.2} + \frac{T^4}{1.2.3.4} - \frac{T^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{T^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

cuius aequationis veritas iam ex Matheſi pura vnicuique eſt cognita; nec tamen, ſpero, diſplicebit haec demonſtratio methodo plane indirecta per mechanicae ambages quaeſita, praeſertim cum reliqua, quae hic tractauimus, apprime confirmet.

Haud difficilius foret ex altera ſerie ſecundum poteſtates impares temporis procedente alteram quoque ſeriem iam cognitam pro ſin. T deriuare. Namque ſi motus a ſitu verticali fili incipere cenſeatur, ita vt pro $t = 0$ ſit $y = 0$, tum autem corpori M celeritas oſcillatoria initialis debita altitudini $= e$ tribuatur, erit tunc

$$\partial t = \frac{\partial y \sqrt{A}}{\sqrt{2g(3Ae - yy)}} \text{ et } t = \sqrt{\frac{A}{2g}} \times A . \text{ſin. } \frac{y}{\sqrt{2Ae}},$$

ſiue

$$y = \sqrt{2Ae} \times \text{ſin. } t \sqrt{\frac{2g}{A}} = \sqrt{2Ae} \times \text{ſin. T}.$$

Series autem noſtra

$$y = \mathfrak{B}' t + \mathfrak{C}' t^3 + \mathfrak{D}' t^5 + \mathfrak{E}' t^7 + \text{etc.}$$

ſubſtitutis pro $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, etc. eorum valoribus ſupra inuentis, poſitoque $n = 0$, euadit

$$y = \frac{\mathfrak{B}' t}{1} - \frac{g \mathfrak{B}' t^3}{1.3A} + \frac{g^2 \mathfrak{B}' t^5}{1.2.3.5A^2} - \text{etc.}$$

vnde $\frac{\partial y}{\partial t}$ (pro $t = 0$) $= \mathfrak{B}' = \sqrt{4ge}$; ſubſtituto nunc hoc valore cum eo ipſius t in ſerie, et aequatis iterum ambobus valoribus y, fit

$$\frac{y}{\sqrt{2Ac}} = \text{ſin. T} = \frac{T}{1} - \frac{T^3}{1.2.3} + \frac{T^5}{1.2.3.4.5} - \frac{T^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

§. 12. Nec caeterum exiſtimandum eſt, quando illi caſus locum habent, vt x ſit conſtans, corpusque M nec deſcendat nec aſcendat, corpus N quoque ad eandem ſuſpenſum altitudinem remanſurum eſſe. Contra illud vel aſcendet, vel quieſcet, prouti N fuerit vel $<$, vel $>$, vel $=$ M. Patet veritas huius aſſerti ex §o 5, vbi in valore ξ ponitur $n = 0$.

§. 13.

§. 13. Cum igitur de integratione abſoluta aequationis noſtrae differentialis deſperandum eſſet, nec ſeries, ad quam peruenimus, multum ſatisfacere poſſit, volui tandem integrationem per notas approximationis regulas inſtituere, laboremque ſatis taedioſum impendi, cum animaduerterem, nec ſic me ſcopo appropinquare, quoniam poſt immenſum demum laborem, quem ſuſcipere fas non erat, accuratius quid de vera motus noſtri indole ſtatui potuiſſet. Etenim per decimas minutorum ſecundorum partes progrediendo, ſiue ponendo ſucceſſiue $t = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$, etc. et ſtatuendo $n = \frac{7}{8}$, $A = 2$ ped. Angl., inueni tentando, ex diuerſis ſeriebus ſummandis pro prima dimidia oſcillatione eam ſeligendam eſſe, vbi t ponatur $= \frac{13}{10}$. Prima igitur dimidia oſcillatio requirit iam tempus 1. 3 ſiue accuratius 1. 314 minutorum ſecundorum. Secunda dimidia oſcillatio iam tempus longe maius requireret, calculusque pro eius determinatione faſtidioſiſſimus fieret. Nec id mirandum eſt, quoniam corpus cum filo conſiderandum eſt vt pendulum longitudinis variabilis; incrementaque citiſſima capeſſentis, cuius oſcillationes per gradus vehementer praecipites igitur retardantur. At non obſtante hac enormi oſcillationum differentia, tautochronismus in iis deprehenditur, ſingulaeque eodem tempore abſoluentur, quaecunque fuerit elongatio initialis, quam c vocauimus.

§. 14. Vltimum nobis relinqui videtur ſubſidium, ad quod confugiamus, ſtatuendo ſcilicet tempus valde magnum et quaſi infinitum, vt videamus, ſi liceat, quaenam tunc ſit futura motus natura. Hoc caſu enim in aequatione

$$A \partial \partial y + n g t t \partial \partial y + 2 g (1 - n) y \partial t^2 = 0,$$

negligi poteſt primus terminus, et, ponendo $\frac{2(1-n)}{n} = k$, habetur aequatio homogenea, ideoque integrabilis

$$t t \partial \partial y + k y \partial t^2 = 0.$$

 Haec

Haec mutatur in $k u \partial u + p \partial p - u \partial p = 0$, vbi $p = \frac{\partial y}{\partial t}$, et $u = \frac{y}{t}$. In hac aequatione ſi denuo fiat $u = p r$, obtinetur ſeparatio variabilium, et, introducendo conſtantem π, integratio dabit

$$l\frac{\pi}{p} = \int \frac{k r \partial r}{1 - r + k r r}, \text{ ſiue}$$

$$l\frac{\pi}{p} = \tfrac{1}{2} l (1 - r + k r r) + \frac{1}{\sqrt{(4k - 1)}} \times$$

$$\times \text{ A. tang. } \frac{\frac{1}{2} r \sqrt{(4k - 1)}}{1 - \frac{1}{2} r}.$$

At $r = \frac{u}{p} = \frac{y}{p t}$, ideoque fit

$$l\frac{\pi}{p} = \tfrac{1}{2} l \left(1 - \frac{y}{p t} + \frac{k y^2}{p^2 t^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{(4k - 1)}} \times$$

$$\times \text{ A. tang. } \frac{\frac{1}{2} y \sqrt{(4k - 1)}}{p t - \frac{1}{2} y},$$

ſiue, logarithmos in vnum contrahendo,

$$\text{A. tang.} \frac{y \sqrt{(4k - 1)}}{p t - \frac{1}{2} y} = l \left(\frac{\pi \pi}{p p (1 - \frac{y}{p t} + \frac{k y^2}{p^2 t^2})}\right)^{\frac{\sqrt{(4k - 1)}}{4}},$$

vnde deducitur

$$\frac{y \sqrt{\frac{4k - 1}{4}}}{p t - \frac{1}{2} y} = \text{tang.} \sqrt{(1 - 4k} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{\pi \pi}{p p (1 - \frac{y}{p t} + \frac{k y^2}{p^2 t^2})}.$$

At eſt

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \times l x = \text{A. tang.} \frac{x - 1}{x + 1} \sqrt{-1},$$

erit igitur

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{\pi \pi}{p p (1 - \frac{y}{p t} + \frac{k y^2}{p^2 t^2})}$$

$$= \text{A. tang.} \left(\frac{\pi \pi - p p (1 - \frac{y}{p t} + \frac{k y^2}{p^2 t^2})}{\pi \pi + p p (1 - \frac{y}{p t} + \frac{k y^2}{p^2 t^2})}\right) \sqrt{-1},$$

inde

inde tandem deriuabitur

$$\text{A. tang.} \frac{y\sqrt{4k-1}}{2pt-y} = \sqrt{(1-4k)} \times$$

$$\times \text{ A. tang.} \left(\frac{\pi\pi - pp\left(1 - \frac{y}{pt} + \frac{ky^2}{p^2t^2}\right)}{\pi\pi + pp\left(1 - \frac{y}{pt} + \frac{ky^2}{p^2t^2}\right)}\right)\sqrt{-1},$$

quae eſt huius formae, A. tang. $\Phi = m$ A. tang. ψ, adeoque non reſolubilis, multoque minus, poſito pro p, $\frac{\partial y}{\partial t}$, integrabilis.

§. 15. At ſi in aequatione

$$\text{A. tang.} \frac{y\sqrt{(4m-1)}}{2pt-y} = \frac{\sqrt{(4m-1)}}{2} l \frac{\pi\pi}{pp\left(1 - \frac{y}{pt} + \frac{my^2}{p^2t^2}\right)},$$

ſubſtituatur logarithmus pro arcu, vt fiat

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{2pt - y + y\sqrt{(1-4m)}}{2pt - y - y\sqrt{(1-4m)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(4m-1)}}{2} l \frac{\pi\pi}{pp\left(1 - \frac{y}{pt} + \frac{my^2}{p^2t^2}\right)},$$

deducitur inde ſequens aequatio:

$$\frac{2pt - y + y\sqrt{(1-4m)}}{2pt - y - y\sqrt{(1-4m)}} = \left(\frac{\pi\pi}{pp\left(1 - \frac{y}{pt} + \frac{my^2}{p^2t^2}\right)}\right)^{\sqrt{(1-4m)}},$$

quae quidem, quoad integrationem, nec magis iuuat ac praecedens aequatio arcus circulares continens; nonnulla tamen ex ea concludere licebit. Primo quidem, cum, poſito $y = 0$, fiat $1 = \left(\frac{\pi\pi}{pp}\right)^{\sqrt{1-4m}}$, ideoque $p = \pi$, patet inde, conſtantem π repraeſentare velocitatem oſcillatoriam corporis, cum poſt tempus quodcunque ſatis magnum per lineam verticalem tranſit, hancque velocitatem inde pro puncto interſectionis cum verticali ſemper fieri eandem. Pro maxima vero elongatione, quam corpus in quauis oſcillatione attingere poteſt, poſito

p

$p = 0$ fit

$$\frac{-y + y\sqrt{(1-4m)}}{-y - y\sqrt{(1-4m)}} = \left(\frac{\pi^2 t^2}{m y^2}\right)^{\sqrt{(1-4m)}},$$

ſiue, poſito

$$m\left(\frac{1-\sqrt{(1-4m)}}{1+\sqrt{(1-4m)}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{(1-m)}}} = \frac{1}{gg},$$

$$y = \pm g \pi t.$$

§. 16. Ex ſimplici hac aequatione apparet, maximas elongationes non ſolum proportionales eſſe velocitati oſcillatoriae corporis per verticalem tranſeuntis, ſed, poſtquam tempus valde magnum praeterierit, etiam ipſi tempori, easque idcirco inde a motus initio continuo maiores fieri.

§. 16. Coronidis loco tandem obſeruaſſe iuuabit, cum curua a corpore deſcribenda infinitos flexus habitura ſit, puncta inflexus omnia eadem eſſe cum illis, vbi curua axem verticalem ſecat. Patet id ex ipſa aequatione noſtra differentiali, vbi, poſito $\partial \partial y = 0$, fit etiam $y = 0$.

AD-

ADDITAMENTVM
ad praecedentem Diſſertationem.

Iam abſoluta erat, quae modo lecta fuit, diſſertatio, cum forte fortuna titulus mihi occurrit diſſertationis ſummi Euleri, quae circa eandem plane materiam verſari videbatur. Nec fallebar. Extat illa in Actis Academiae noſtrae pro Anno 1778. P. 2., titulumque prae ſe fert: *De motu oſcillatorio duorum corporum ex filo ſuper trochleas traducto ſuſpenſorum.* Dubius, annon proprium opuſculum ſupprimerem, cum in eodem cum tanto viro curriculo conſtitutus, non niſi longe veſtigia eius ſequi poſſem, et, ſi quae rectius haberem, nonniſi poſt eum repetiiſſe neceſſario videbar. Poſtea vero, cum citatam Diſſertationem attente perlegiſſem, inueni meam, quamuis in diuerſis cum ea conſpiret, aut infra maneat, noua tamen quaedam continere, propter quae Academiae offerri poſſit. De quibus vt Lector ipſe iudicare poſſit, oculis eius ſqueleton quaſi Diſſertationis Ill. Euleri ſubiiciam.

1. Quamuis ille duas trochleas adhibuerit, id nullum plane diſcrimen facit, cum calculus idem ſit, nec ex alia ratione duae trochleae loco vnius, vt ego feci, adhibitae fuerint, quam vt motus oſcillatorius corporum facilius concipi poſſit, nec vnum ab altero turbetur.

2. Ill. Eulerus corpora per centra grauitatis ſuſpenſa cogitauit, vnde non niſi motus progreſſiuus et oſcillatorius oriri poterat, nec ipſi motus rotatorius conſiderandus venit.

3. Cum primas aequationes differentiales generaliſſimas prodidiſſet, mox ob nimiam difficultatem problematis oſcillationes ſtatuit quam minimas, imo corpora A et B, nobis M et N dicta, aequalia ponit, vnde etiam tenſio fili, quam Π vocabamus, = A = B. (vid. §. 7.).

4. Peruenit tunc (§. 10.) ad aequationem differentialem ſecundi ordinis, quae ideo tantum a noſtra differt, quoniam loco applicatae minimae y introduxit angulum minimum η, quem format filum cum linea verticali: hanc aequationem in ſeriem conuertit ſecundum poteſtates temporis progredientem, quae ponitur = η.

5. Subſtitutione quadam (§. 12.) transformat aequationem differentialem, duciturque ad aliam primi ordinis, et formae Riccatianae, et eius quidem, quam nullo modo adhuc tractare licuit; vnde concludit, determinationem huius motus oſcillatorii, quo corpora A et B aequalia ciebuntur, dum filum vniformiter ſuper trochleas promouetur, pro caſu deſperato eſſe habendam.

6. In §. 13. exhibet quidem valorem integralem terminis finitis, at vero tantummodo appropinquantem, cum in integratione tempus pro conſtanti fuerit aſſumtum.

7. In §. 16. et ſeqq. tractat caſus quosdam, vbi corpora A et B ſunt inaequalia, et quibus praeter omnem expectationem, inquit, motum definire licet. Eruuntur ii ex ſerie, de qua ſupra diximus, quae ſecundum poteſtates temporis progrediens exhibet valorem anguli, quem pendulum cum verticali efficit. Cum enim ſeries quauis vice abrumpatur, quando coëfficientes terminorum, vnus poſt alterum, aequales nihilo ſtatuantur, deducuntur inde infinitae relationes corporum A et B, quibus integrale definire liceat: animadver-

vertendum eſt autem, hos caſus omnes pro corpore aſcendente obtinere, nec vnicum caſum dari, vbi in pendulo deſcendente oſcillationes definiri queant. Caeterum caſus iſte, de quibus hic dictum fuit, omnes etiam, ſi modo attendiſſemus, ex duplici noſtra ſerie ſecundum poteſtates pares et impares temporis progrediente, et valorem ipſius y ſiſtente, deriuari potuisſent, ponendo ſucceſſiue in vna $1+5n$, $1+14n$, $1+27n$, etc. $=0$, et in altera $1+2n$, $1+9n$, etc. $=0$. Imo cum motum rotatorium cum oſcillatorio combinati ſimus, reſultabunt inde caſus infinities plures, quam illi, quos Ill. Eulerus exhibuit, quoniam nobis littera n eſt expreſſio, non ſolum ex maſſis M et N, ſed et ex earum momentis inertiae Mkk et Nff, atque ex radiis cylindrorum a et α, quibus filum circumuoluitur, conflata.

RECHERCHES SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE.

Par

NICOLAS FUSS.

Préſenté à la Conférence le 19 Janvier 1789.

§. 1.

Dans les recherches que je me ſuis propoſé de faire ici ſur une eſpèce de mouvement ſimple, en apparence, & facile à déterminer, mais qui, pris dans toute ſa généralité, ne laiſſe pas d'avoir de grandes difficultés: je conſidère une perche, ou autre corps ſemblable qui, appuyé contre un parois vertical, gliſſe, en tombant le long d'un plancher horizontal. Je ſuppoſe que ce mouvement ſe faſſe dans un plan vertical, paſſant par le centre de gravité du corps, & que les deux plans, ſur leſquels gliſſent les extrémités de la perche, ſoyent aſſez unis pour que le corps puiſſe y gliſſer librement, afin que je ſois diſpenſé de tenir compte du frottement. Sans cette réſtriction, à laquelle le Géomètre ſe voit ſouvent obligé d'avoir recours dans des recherches de Mécanique, le Problème deviendroit beaucoup trop compliqué, pour qu'on pût eſpérer de le réſoudre d'une maniere complette & ſatisfaiſante.

§. 2.

§. 2. Soit A O B le plan, dans lequel le mouvement ſe fait, O A le plancher, O B le parois, C D la perche dans ſa poſition initiale, c'eſt-à-dire, où elle ſe trouve au moment qu'elle commence à ſe mettre en mouvement. Soit la longueur de la perche $CD = c$, ſon poids $= M$, ſon centre de gravité en G, la longueur de la portion $GC = a$ & de la portion $GD = b$. Et puisque le corps acquiert en tombant un mouvement gyratoire autour de ſon centre de gravité G, pendant que ce point G deſcend, par un mouvement progreſſif, ſuppoſons au corps un axe de gyration paſſant par le point G perpendiculairement au plan A O B, & ſoit Mkk le moment d'inertie par rapport à cet axe. Tab. VI. Fig. 1.

§. 3. Ces dénominations établies ſoit P Q la poſition du corps après un tems de t ſecondes, écoulé du moment où il a commencé à gliſſer; & en abaiſſant du point G, ſur O A, la perpendiculaire G X, ſi nous nommons l'abſciſſe de la courbe décrite par le centre de gravité, $OX = x$ & l'ordonnée $XG = y$, la relation entre x & y déterminera la poſition du centre de gravité G, pour chaque tems t écoulé du moment où le corps à commencé à ſe mettre en mouvement.

§. 4. Déſignons par Φ l'angle O P Q, & en tirant du point G, ſur O B, la perpendiculaire G R, nous aurons

$$OX = x = b \text{ coſ. } \Phi;$$

$$XG = y = a \text{ ſin. } \Phi;$$

et maintenant tout ſe réduit à déterminer l'angle $OPQ = \Phi$, pour chaque intervalle de tems t, les deux coordonnées étant données par cet angle.

§. 5. Conſidérons apréſent les forces qui agiſſent ſur notre corps dans la poſition P Q; & il ſe préſente d'abord

Tab. VI. Fig. 2. la peſanteur M, qui agit dans la direction verticale G X, tout comme ſi la maſſe entière du corps étoit concentrée dans le point G. Enſuite, parceque les deux extrémités de la perche exercent des preſſions contre les plans O A & O B en P & Q, à cauſe de la réaction nous aurons deux forces qui agiſſent ſur les deux extrémités du corps, l'une dans la direction P p, perpendiculairement à O A, & contraire à la direction de la peſanteur, l'autre dans la direction Q q, perpendiculaire à O B.

§. 6. Déſignons par P & Q ces deux forces, qui dépendent de l'inclinaiſon ϕ de la perche & qui nous ſont, par conſéquent, inconnues: & puisque ſelon les principes de Mécanique le mouvement du centre de gravité G ſe fait tout comme ſi chaque force agiſſoit immédiatement ſur ce point, nous aurons une force horizontale agiſſant dans la direction R G = Q & une force verticale qui agit dans la direction X G = P, de façon que, la gravité M agiſſant dans la direction contraire G X, cette force verticale ſelon X G ſera = P — M; d'où l'on tire, par les principes connus, ces deux équations différentielles du ſecond degré:

I. $\frac{M \partial \partial x}{2 g \partial t^2} = Q$;

II. $\frac{M \partial \partial y}{2 g \partial t^2} = P - M$.

où g marque la hauteur de laquelle un corps tombe librement dans la premiere ſeconde de ſa chûte.

§. 7. Or nous avons trouvé ci-deſſus (§. 4.) $x = b \operatorname{coſ.} \phi$, $y = a \operatorname{ſin.} \phi$, d'où l'on tire par la différentiation:

$\partial x = - b \partial \phi \operatorname{ſin.} \phi$;

$\partial y = + a \partial \phi \operatorname{coſ.} \phi$;

$\partial \partial x$

$$\partial \partial x = - b \partial \partial \Phi \text{ ſin.} \Phi - b \partial \Phi^2 \text{ coſ.} \Phi ;$$
$$\partial \partial y = + a \partial \partial \Phi \text{ coſ.} \Phi - a \partial \Phi^2 \text{ ſin.} \Phi ;$$

En ſubſtituant donc ces valeurs dans nos deux équations différentio - différentielles, les deux forces P & Q ſeront exprimées de la manière ſuivante :

$$Q = - \frac{M (b \partial \partial \Phi \text{ ſin.} \Phi + b \partial \Phi^2 \text{ coſ.} \Phi)}{2 g \partial t^2} ;$$
$$P = \frac{M (a \partial \partial \Phi \text{ coſ.} \Phi - a \partial \Phi^2 \text{ ſin.} \Phi)}{2 g \partial t^2} + M.$$

§. 8. Pour la détermination de la relation qui ſubſiſte entre les élémens du tems & de l'inclinaiſon du corps, nous allons conſidérer le mouvement gyratoire autour du centre de gravité, & déterminer les momens des forces P & Q par rapport au point G. (La troiſième force M ne donnant point de moment, parceque ſa direction paſſe par le centre de gravité même). Ainſi nous aurons :

Le moment pour la force $P = a P \text{ coſ.} \Phi$;

Le moment pour la force $Q = b Q \text{ ſin.} \Phi$.

Le premier tend à diminuer l'angle Φ, l'autre tend à l'augmenter, d'où nous aurons le moment entier tendant à diminuer cette inclinaiſon $= b Q \text{ ſin.} \Phi - a P \text{ coſ.} \Phi$.

§. 9. Ayant trouvé ce moment des forces ſollicitantes, l'accélération angulaire nous fournit cette équation :

$$\frac{M k k \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = b Q \text{ ſin.} \Phi - a P \text{ coſ.} \Phi ,$$

qui, en ſubſtituant à la place de Q & P les valeurs trouvées ci - deſſus (§. 7.), prendra cette forme :

$$\frac{M k k \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{M (b b \partial \partial \Phi \text{ ſin.} \Phi^2 + b b \partial \Phi^2 \text{ ſin.} \Phi \text{ coſ.} \Phi)}{2 g \partial t^2} \\ - \frac{M (a a \partial \partial \Phi \text{ coſ.} \Phi^2 - a a \partial \Phi^2 \text{ ſin.} \Phi \text{ coſ.} \Phi)}{2 g \partial t^2} \\ - M a \text{ coſ.} \Phi . \end{array} \right\} ,$$

équa-

équation qui ſe réduit facilement à la ſuivante :

$$\left.\begin{cases} (kk + aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)\,\partial\partial\Phi \\ + (bb - aa)\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi\,.\,\partial\Phi^2 \\ + 2ga\,\partial t^2\,.\,\text{coſ.}\,\Phi \end{cases}\right\} = 0.$$

§. 10. Comme cette équation ne contient pas le tems t même, mais ſeulement ſon élément ∂t, que nous ſuppoſerons conſtant, mettons $\partial t = \frac{\partial \Phi}{z}$, & à cauſe de $\partial\partial t = 0$, nous aurons $z\,\partial\partial\Phi - \partial z\,\partial\Phi = 0$, donc $\partial\partial\Phi = \frac{\partial z\,\partial\Phi}{z}$. Subſtituons cette valeur dans notre derniere équation, & après l'avoir diviſée par $\partial\Phi$ & multipliée par zz, elle prendra la forme ſuivante :

$$\left.\begin{cases} (kk + aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2)\,z\,\partial z \\ + (bb - aa)\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi.\,zz\,\partial\Phi \\ + 2ga\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi \end{cases}\right\} = 0.$$

§. 11. Mettons dans cette équation $zz = 2s$, afin que $z\,\partial z = \partial s$, & l'équation dont il faudra chercher l'intégrale ſera :

$$\left.\begin{cases} \partial s\,(kk + aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2) \\ + 2s\,\partial\Phi\,(bb - aa)\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi \\ + 2ga\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi \end{cases}\right\} = 0.$$

dont l'intégrale eſt ouvertement

$$s\,(kk + aa\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + bb\,\text{ſin.}\,\Phi^2) = C - 2ga\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

§. 12. Pour déterminer la conſtante C, que nous venons d'introduire, il faut remarquer que $z = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, et que par conſéquent z exprime la viteſſe gyratoire. Cette viteſſe doit être nulle dans la poſition C D de la perche, c'eſt-à-dire avant le commencement du mouvement. Or en mettant

z

$z = 0$, il y a auſſi $s = \frac{1}{2} zz = 0$, donc $C = 2ga \text{ ſin.} \Phi$, d'où l'on tire l'angle d'inclinaiſon que la perche a eue avant que de gliſſer, vu que $\text{ſin.} \Phi = \frac{C}{2ga}$. Mais cet angle COD eſt facile à trouver, dans chaque cas, par l'expérience; ſi nous le regardons donc comme connu, & que nous le mettons $COD = \alpha$, nous aurons $C = 2ga \text{ ſin.} \alpha$, & par conſequent

$$s(kk + aa \text{ coſ.} \Phi^2 + bb \text{ ſin.} \Phi^2) = 2ga(\text{ſin.} \alpha - \text{ſin.} \Phi).$$

§. 13. Soit pour abrêger $kk + aa = ff$ & $bb - aa = hh$, & notre équation, à cauſe de $\text{coſ.} \Phi^2 = 1 - \text{ſin.} \Phi^2$, prendra cette forme plus ſimple:

$$s(ff + hh \text{ ſin.} \Phi^2) = 2ga(\text{ſin.} \alpha - \text{ſin.} \Phi),$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{zz}{2} = \frac{2ga(\text{ſin.} \alpha - \text{ſin.} \Phi)}{ff + hh \text{ ſin.} \Phi^2},$$

ce qui fournit la vîteſſe gyratoire

$$z = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sqrt{\frac{4ga(\text{ſin.} \alpha - \text{ſin.} \Phi)}{ff + hh \text{ ſin.} \Phi^2}}.$$

§. 14. Cherchons auſſi la vîteſſe progreſſive du centre de gravité G, dans la direction verticale GX. Pour cet effet il faut introduire, à la place de l'inclinaiſon Φ, l'ordonnée y. Or $y = a \text{ ſin.} \Phi$, donc $\partial y = a \partial \Phi \text{ coſ.} \Phi$ et partant

$$\partial \Phi = \frac{\partial y}{a \text{ coſ.} \Phi} = \frac{\partial y}{\sqrt{(aa - yy)}},$$

d'où, en mettant pour abrêger, $\text{ſin.} \alpha = \frac{m}{a}$, nous aurons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t \sqrt{(aa - yy)}} = \frac{2a\sqrt{g(m - y)}}{\sqrt{(aaff + hhyy)}},$$

d'où provient la vîteſſe progreſſive

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2a\sqrt{g(m - y)(aa - yy)}}{\sqrt{(aaff + hhyy)}}.$$

§. 15. De ces deux vîteſſes il eſt facile de déduire deux expreſſions pour l'élément du tems ∂t, l'une par l'inclinaiſon & ſa différentielle, qui eſt

$$\partial t = \partial \Phi \sqrt{\frac{ff + hh\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{4ga(\text{ſin.}\,\alpha - \text{ſin.}\,\Phi)}}\,;$$

l'autre par l'ordonnée y & ſa différentielle, qui eſt

$$\partial t = \frac{\partial y}{2a}\sqrt{\frac{aaff + hhyy}{g(m - y)(aa - yy)}}\,.$$

§. 16. S'il étoit poſſible de trouver l'intégrale de l'une ou de l'autre de ces deux expreſſions, on connoîtroit pour chaque inclinaiſon de la perche, ou pour chaque élevation du centre de gravité, le tems *t* qui lui répond; & réciproquement, l'inclinaiſon, ou bien auſſi la hauteur du centre de gravité ſeroit connue, pour chaque intervalle de tems, écoulé depuis le commencement du mouvement, & par conſéquent la poſition de la perche & ſon mouvement ſeroient parfaitement déterminés. Mais ce n'eſt que par approximation, ou bien par les quadratures, qu'on peut trouver l'intégrale des expreſſions de la forme de celles que nous venons de trouver pour l'élément du tems ∂t. Cependant, comme, en nous accordant la quadrature des lignes courbes, tout le reſte ſe détermine ſans difficulté, le Probleme doit être régardé comme parfaitement réſolu.

Développement du cas où $b = a$.

§. 17. Comme le cas particulier, où le centre de gravité ſe trouve dans le milieu de la longueur de la perche ſe prête, non pas à l'intégration actuelle de l'équation différentielle du premier degré, à laquelle nous avons porté la ſolution générale du Problème, mais à des approximations aſſez faciles, il vaudra la peine de faire l'application à ce cas. Soit donc $b = a$, & nous aurons $h = 0$, d'où l'on aura pour ∂t les deux expreſſions ſuivantes:

$$\partial t = \frac{f\,\partial \Phi}{\sqrt{4ga(\text{ſin.}\,\alpha - \text{ſin.}\,\Phi)}}\,,$$

$$\partial t = \frac{f}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{(m - y)(aa - yy)}}\,,$$

dont

dont la premiere pourroit bien, à la verité, être réduite facilement à cette expreſſion:

$$t = \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{n}{g a}} \cdot \int \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(1 - n\, \text{ſin.}\, \Phi)}},$$

& intégrée par ſérie, moyennant la méthode que feu M. Euler a donnée dans ſon ouvrage, *Inſtitutiones Calculi Integralis*, *Tom. I. pag.* 186. Mais cette ſérie ne nous feroit d'aucun uſage, non ſeulement à cauſe de ſa forme compliquée, mais auſſi parce que $n > 1$.

§. 18. Il y auroit encore un autre moyen plus propre pour exprimer le tems t par une ſérie & même par une ſérie convergente: ce feroit de mettre dans la premiere de nos deux expreſſions pour ∂t, ſin. $\alpha = \mu$ & ſin. $\Phi = v$, ou bien dans l'autre $m = a\mu$ & $y = a v$, pour avoir

$$\partial t = \frac{f}{\sqrt{4 g a}} \cdot \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)} \cdot \sqrt{(1 - v v)}}.$$

Alors on n'auroit qu'à exprimer $\frac{1}{\sqrt{(1 - v v)}}$ par ſérie & à multiplier chaque terme par $\frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)}}$. Les intégrales ſe réduiroient toutes facilement à la premiere

$$\int \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = -2 \sqrt{(\mu - v)};$$

mais il en naitroit toujours une expreſſion extrêmement compliquée.

§. 19. On pourra cependant ſe ſervir avec avantage de la méthode dont nous venons de parler, pour déterminer le tems entier de la chûte, c'eſt-à-dire, pour voir combien de tems la perche mettra à gliſſer depuis l'inclinaiſon OCD $= \alpha$ jusqu'à la fin. Nous n'aurons, pour cet effet, qu'à prendre l'intégrale depuis le terme $\Phi = \alpha$ jusqu'au terme $\Phi = 0$, ou bien, à chercher, ſelon la manière ordinaire d'indiquer ces intégrales

$$t = \int \frac{f \partial \Phi}{\sqrt{4 g a (\mathit{ſin.}\, \alpha - \mathit{ſin.}\, \Phi)}} \left[\begin{array}{l}\text{depuis } \Phi = \alpha \\ \text{jusqu'à } \Phi = 0\end{array}\right].$$

§. 20. Ayant donc transformé, dans le §. 18, l'expreſſion de l'élement ∂t en celle-ci :

$$\partial t = \frac{f}{\sqrt{4 g a}} \cdot \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)} \times \sqrt{(1 - v v)}},$$

puisqu'on a par une ſérie infinie

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - v v)}} = 1 + \tfrac{1}{2} v^2 + \tfrac{1.3}{2.4} v^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} v^6 + \text{etc.}$$

il y aura

$$t = \frac{f}{\sqrt{4 g a}} \int \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} \left(1 + \tfrac{1}{2} v^2 + \tfrac{1.3}{2.4} v^4 + \tfrac{1.3.5}{2.4.6} v^6 + \text{etc.}\right),$$

les termes d'intégration étant depuis $v = \mu$ jusqu'à $v = 0$.

§. 21. Mettons maintenant, pour la réduction de toutes les intégrales que cette ſérie produit, à une ſeule

$$\int \frac{v^n \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = A v^n \sqrt{(\mu - v)} + B \int \frac{v^{n-1} \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}},$$

& en prenant les différentielles, nous aurons

$$\frac{v^n \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = n A v^{n-1} \partial v \sqrt{(\mu - v)} - \frac{A v^n \partial v}{2 \sqrt{(\mu - v)}} + \frac{B v^{n-1} \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}},$$

ou bien

$$v^n = (\mu n A + B) v^{n-1} - (n + \tfrac{1}{2}) A v^n,$$

d'où l'on tire $A = \frac{-2}{2n+1}$ & $B = \frac{2 \mu n}{2n+1}$, & partant

$$\int \frac{v^n \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = -\frac{2}{2n+1} v^n \sqrt{(\mu - v)} + \frac{2 \mu n}{2n+1} \int \frac{v^{n-1} \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}}.$$

Or comme les deux termes d'intégration ſont $v = \mu$ & $v = 0$, le terme abſolu $\frac{2}{2n+1} v^n \sqrt{(\mu - v)}$ devient o pour l'un & l'autre;

l'autre de ces termes; ainſi nous aurons cette ſimple réduction:

$$\int \frac{v^n \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = \frac{2 \mu n}{2n+1} \int \frac{v^{n-1} \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}}.$$

§. 22. En vertu de cette réduction nous aurons pour les membres de notre ſérie les intégrales ſuivantes, priſes depuis $v = \mu$ jusqu'à $v = 0$:

$$\int \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = - 2 \sqrt{\mu};$$

$$\int \frac{v \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = - \frac{2\mu}{3} . 2 \sqrt{\mu};$$

$$\int \frac{v v \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = - \frac{4\mu}{5} . \frac{2\mu}{3} . 2 \sqrt{\mu};$$

$$\int \frac{v^3 \partial v}{\sqrt{(\mu - v)}} = - \frac{6\mu}{7} . \frac{4\mu}{5} . \frac{2\mu}{3} . 2 \sqrt{\mu};$$

etc.

On aura donc

$$\int \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)} \times \sqrt{(1 - v v)}} = - 2 \sqrt{\mu} (1 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{2.4}{3.5} \mu^2 + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{2.4.6}{3.5.7} \mu^3 + \text{etc.})$$

& partant le tems, ou la durée entiere de la chûte de notre perche ſera

$$t = - f \sqrt{\tfrac{\mu}{g a}} (1 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{2.4}{3.5} . \mu^2 + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{2.4.6}{3.5.7} \mu^4 + \text{etc.})$$

Quant au ſigne — qui eſt devant cette expreſſion, il faut remarquer que comme Φ & y décroiſſent, les vîteſſes $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ & $\frac{\partial y}{\partial t}$, auroient du être priſes négativement, d'où l'on auroit eu

$$\partial t = - \frac{f}{\sqrt{4 g a}} . \frac{\partial v}{\sqrt{(\mu - v)} . \sqrt{(1 - v v)}},$$

& par conſéquent

$$t = f \sqrt{\tfrac{\mu}{g a}} (1 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{2.4}{3.5} \mu^2 + \tfrac{1.3}{2.4} . \tfrac{2.4.6}{3.5.7} \mu^4 + \text{\&c.}).$$

Exemple.

§. 23. Faiſons l'application de cette expreſſion à un cas déterminé. Soit la longueur de la perche, que nous ſuppoſerons cylindrique, $c = 10$ pieds & le rayon de 2 pouces,

ces, & nous aurons $kk = 1201$ pouces □; $f = 5,774$ pieds. En ſuppoſant donc les deux plans O A & O B tels que le mouvement de la perche commence à une inclinaiſon de 60° (*), notre expreſſion, à cauſe de $\mu = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $a = 5$ pieds & $g = 15,625$ pieds, ſera

$$t = 0,6079 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.4}{3.5} \mu^2 + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{2.4.6}{3.5.7} \mu^4 + \text{\&ct.}\right).$$

En prenant les ſix premiers termes de cette ſérie, on obtient pour la durée entiere de la chûte de notre cylindre $t = 0,834$ ſecondes. Ce tems ſera certainemeut conſidérablement plus grand, ſi l'on tient compte du frottement, mais dans la ſuppoſition du frottement nul, ce réſultât paroît être conforme à la nature du mouvement de ce cylindre.

§. 24. Comme au commencement de la chûte, où l'inclinaiſon du cylindre eſt de 60 degrés, il y a $y = a$ ſin. $\alpha = 4\frac{1}{3}$ pieds $= 52$ pouces, ſi nous faiſons décroître cette élévation du centre de gravité d'un pouce ſucceſſivement, c'eſt-à-dire, ſi nous mettons $\partial y = 1$ pouce $= \frac{1}{12}$ pied, nous aurons

$$\partial t = \frac{0,06086}{\sqrt{(\frac{13}{3} - y)} \times \sqrt{(25 - yy)}}.$$

C'eſt à l'aide de cette formule qu'a été calculée la table ſuivante propre à repréſenter aſſez exactement le mouvement & la chûte de notre cylindre, mais toujours dans la ſuppoſition du frottement nul. La premiere colonne marque le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, jusqu'à ſon ex-

(*) Nous avons ſuppoſé ci-deſſus (§. 1.) les deux plans parfaitement polis & le frottement nul. Si ce cas pouvoit avoir lieu, le mouvement commenceroit dès que la perche s'écarteroit de la ſituation verticale. C'eſt pour la commodité du calcul que je ſuppoſe ici $\alpha = 60$, valeur qui paroît tenir le millieu entre celles qu'on obſerve communément dans ces ſortes de mouvemens.

extinction ; la ſeconde préſente l'élevation du centre de gravité au deſſus du plan horizontal ; la troiſième la diſtance de ce point au plan vertical ; & la quatrième l'inclinaiſon du cylindre. Le tems eſt exprimé en millièmes parties d'une ſeconde & les diſtances en pouces. J'ai cru qu'il étoit ſuperflu de donner ces quantités pour chaque pouce d'abaiſſement du centre de gravité, parce qu'après les 8 ou 10 premiers pouces l'accroiſſement du tems devient peu ſenſible.

t	y	x	Φ
0, 000	52	30, 00	60°, 0′
0, 080	51	31, 60	58, 13
0, 134	50	33, 17	56, 26
0, 176	49	34, 63	54, 45
0, 211	48	36, 00	53, 8
0, 241	47	37, 30	51, 34
0, 268	46	38, 53	50, 3
0, 292	45	39, 69	48, 35
0, 314	44	40, 78	47, 10
0, 352	42	42, 84	44, 26
0, 385	40	44, 73	41, 48
0, 414	38	46, 43	39, 18
0, 440	36	48, 00	36, 52
0, 464	34	49, 44	34, 31
0, 486	32	50, 75	32, 14
0, 506	30	52, 00	30, 0
0, 553	25	54, 55	24, 37
0, 596	20	56, 57	19, 28
0, 636	15	58, 09	14, 29
0, 671	10	59, 16	9, 36
0, 703	5	59, 79	4, 47
0, 773	0	60, 00	0, 0

La

La durée entiere de la chûte eſt donc ici 0, 773 ſecondes & par conſéquent ſeulement de 0, 06 ſecondes trop petite; d'où l'on voit que cette approximation donne des réſultâts beaucoup plus conformes à la vérité qu'on n'auroit du en attendre.

§. 25. Nous terminerons ces recherches par une obſervation, c'eſt que la ligne courbe décrite par le centre de gravité dans le mouvement de la perche, tel que nous l'avons conſidéré généralement au commencement de ce Mémoire, eſt une Ellipſe, dont les portions de la perche, de part & d'autre du centre de gravité ſont les demi-axes & O le centre. La démonſtration en eſt très facile: car $\Delta XPG \sim \Delta RGQ$ donc $XG : PG = RQ : GQ$, donc

$$XG = y = \frac{PG \cdot RQ}{GQ} = \frac{a}{b} \sqrt{(bb - xx)}.$$

Propriété ſur laquelle eſt fondée la déſcription de l'Ellipſe qu'on trouve dans l'ouvrage de François *van Schooten*: *De organica Sectionum conicarum in plano deſcriptione.* V. Exercit. Math. pag. m. 325.

Dans le cas déterminé que nous venons de traiter, le chemin du centre de gravité ſera donc un arc d'un cercle qui a le point O pour centre & dont le rayon eſt de 5 pieds.

DE MOTV ET REACTIONE AQVAE PER TVBOS MOBILES TRANSFLVENTIS.

Auctore

IACOBO BERNOVLLI.

Conuent. exhib. die 26 Febr. 1789.

§. 1.

Eandem quam titulus exhibet materiam olim ſub eadem rubrica generaliter tractauit Celeberrimus Eulerus, Tom. VI. Nov. Commentariorum Academiae noſtrae, cum ante iam in Actis Berolinenſibus machinas hydraulicas virorum Clariſſimorum Segneri et de Mour, ad iſtam Theoriam ſpectantes, iisdemque principiis innixas, calculo ſubieciſſet. Itaque actum agere, aut omnino in ſuſpicionem vanae fiduciae venire poſſem, ac ſi poſt tantum virum plenius ac melius iſtud argumentum abſoluere ſperarem. Verum haec cogitatio certe mentem meam non ſubit. Animus eſt egregium virium viuarum principium, quod iam, dolendum nimis a Phyſicis negligi ſolet, in lucem reuocare, et quam concinne eadem Theoria, quam Eulerus expoſuit, inde deduci queat, ob oculos ponere. Superfluus ſane hic labor iis non videbitur, qui conſiderauerint, quam eximie quaeuis Theoria Phyſico-Mathematica ex conſenſu earundem legum, ex diuerſis principiis petitarum, confirmetur: imo quam ſaepius acciderit, vt, cum vna methodus non niſi vsque ad cer-

certos limites perducere valuiſſet, aliam methodum inueſtigando et perſequendo, vlteriores progreſſus inde fieri licuerit. Sic v. gr. quantumuis ardua ſint problemata, quae Ill. Eulerus methodo ſua directa paſſim ſoluit in operibus ſuis, haud tamen memini ſolutionem extare problematis illius, in quo motus quaeritur aquae per foramen ex vaſe vno pluribusue diaphragmatis inſtructo exilientis: beatus vero patruus meus a principio indirecto virium viuarum egreſſus, in Hydrodynamica ſua hoc problema feliciter et perquam concinne ſoluit; tum temporis vero iam ſe dubitare, inquit, idem num alio modo et ex aliis principiis ſolui queat.

§. 2. Principium vero virium viuarum in hydrodynamicis legitime adhiberi, patet tum ex conſenſu cum aliis methodis, tum ex elaſticitate particularum aquearum, qua admiſſa, noſtris quidem temporibus nemini Phyſico amplius dubitare licet, num vis viua in iis conſeruetur. In methodo Euleriana autem, vt et in omnibus aliis, tacite ſaltem perfectam elaſticitatem aquae tribui, vnicuique attentius rem conſideranti patet (*), idem-

Tab V. Fig. 5.

(*) Sequens ratiocinium mihi elaſticitatem aquae extra omne dubium, ſi quod adhuc Phyſicis remaneat, conſtituere videtur. Sit aqua ſtagnans ad altitudinem A B in tubo (fig. 5), maſſula quaeuis C c preſſionem ſuſtinebit debitam altitudini B C aquae ſupraſtantis, cumque haec maſſula ſit in aequilibrio, oportet vt aqua inferior A B tanta eademque vi verſus ſupra retroagat. Fingatur nunc congelari maſſulam C c, immutata eiusdem grauitate ſpecifica, aequilibrium ſane durabit, nec preſſiones ipſae contrariae inde mutabuntur; imo preſſiones adhuc eaedem manebunt, ſi particula C c ita parietibus tubi adgeletur, vt plane firma immobilisque fiat. Effundatur nunc aqua B c, ceſſabit quoque preſſio ſupra maſſula, at durabit adhuc illa, quae in tubo vndique clauſo A C eandem ſurſum premit, cum nihil adſit quod illam deſtruere potuiſſet. Quomodo autem corpus quodcunque, ſiue ſolidum ſiue fluidum, inter limites conſtitutum, absque ſubſidio grauitatis vlliusue vis extraneae preſſionem ad remouendos limites exerceat, quin idem elaſticitate praeditum aſſumatur, id et mihi, et ſpero cuivis alii attentius rem conſideranti prorſus impoſſibile videbitur.

idemque ſentiebat Celeb. Lambert, ideoque principium Danielis Bernoulli nequidem indirectum vocabat. V. litteram IV. ad Karſtium in Tom. IV. Sect. 2. commercii litterarii poſt mortem eius a fratre meo editi.

§. 3. Conſideremus itaque tubum quemcunque AMD circa axem fixum CE in ſenſu AH gyrantem, motumque tum tubi, tum aquae tubum transfluentis iam ad ſtatum vniformitatis perueniſſe ponamus. Vocetur celeritas gyratoria puncti infimi D $= u$, eiusque diſtantia ab axe DE $= b$, erit celeritas puncti A $= \frac{cu}{b}$, ſi diſtantia eius AC fiat $= c$. Effluat vero aqua in D velocitate relatiua $= v$, ibique amplitudo $= ff$, ſi eadem ſit $= ee$ in A, erit ibi celeritas $= \frac{ffv}{ee}$, qua aqua per tubum mouetur. Porro ſit altitudo verticalis tubi $= a$, angulus quem extremitas D cum ipſa directione motus gyratorii conſtituit, ſiue MDI $= \alpha$, idemque pro loco ſupremo MAH $= \varepsilon$. Tubus rotando eleuet pondus F, cuius momentum $= Fb$, ideoque celeritas qua attollitur $= \frac{hu}{b}$; denique ſit $g =$ ſpatio lapſu grauium libero tempore 1″ deſcripto. Tab. V. Fig. 3.

§. 4. His poſitis apparet tempuſculo ∂t guttulam aqueam $= ffv\partial t$ infra ex tubo egreſſuram fore, et aequalem in parte ſuperiori ſuccedere: et cum totum ſyſtema iam ad vniformitatem perueniſſe cenſeatur, conſiderari poteſt, ac ſi omnis aqua reliqua in ſtatu ſuo permanſiſſet, ſolaque guttula $ffv\partial t$ per altitudinem $= a$ delapſa fuiſſet, celeritatemque debito modo immutaſſet, pondus F autem per ſpatiolum $= \frac{hu\partial t}{b}$ aſcendiſſet. At quoad celeritatem aquae in A ſubintrantis duo caſus conſiderandi veniunt. Poteſt enim aqua extrinſecus affluens iam ea velocitate gaudere, qua per initium tubi in A moueri debet, ſcilicet velocitate influenti $= \frac{ffv}{ee}$, et gyratoria $= \frac{cu}{b}$: qui eſt caſus, quem Eulerus in Diſſertatione ſua tractauit, mo-

 dum-

dumque indicauit, et figura illuſtrauit, quo aqua in A hisce velocitatibus ſuccedat. Deinde ſi aqua in A ſuccedens ex vaſe quaſi infinito, vbi tanquam ſtagnans conſideretur, proflueret, alter caſus inde emergeret, quo quaeuis guttula, initio quieſcens, ſtatim cum in A ſubintret, celeritates relatiuas $\frac{ffv}{ee}$ et $\frac{cu}{b}$ acquirat, quod omnino fieri neceſſe eſt, niſi vacuum oriatur, a preſſione atmoſpherae extrinſeca facile impediendum. Pro primo caſu igitur celeritates $\frac{ffv}{ee}$ in A, et v in D reſoluantur vnaquaeque in duas alias, quarum vna ſit in eadem directione cum celeritate rotatoria, et altera ad eandem perpendicularis: erunt illae pro extremitate ſuperiori $= \frac{ffv\, \text{coſ.}\, \varepsilon}{ee}$, et $\frac{ffv\, \text{ſin.}\, \varepsilon}{ee}$; pro inferiori autem $= v\, \text{coſ.}\, \alpha$, et $v\, \text{ſin.}\, \alpha$. Inde celeritas guttae rotatoria abſoluta in A $= \frac{cu}{b} + \frac{ffv\, \text{coſ.}\, \varepsilon}{ee}$, et in D $= u + v\, \text{coſ.}\, \alpha$. Erit igitur vis viua guttulae in D

$$= \frac{ffv\, \partial t}{4g} \left[(u + v\, \text{coſ.}\, \alpha)^2 (v\, \text{ſin.}\, \alpha)^2 \right],$$

cum antea in A fuiſſet

$$= \frac{ffv\, \partial t}{4g} \times \left[\left(\frac{cu}{b} + \frac{ffv\, \text{coſ.}\, \varepsilon}{ee}\right)^2 + \left(\frac{ffv\, \text{ſin.}\, \varepsilon}{ee}\right)^2 \right].$$

Incrementum ergo virium viuarum, quod aeſtimatur ex harum formularum differentia, aequandum eſt deſcenſui actuali, qui eſt $= ffv\, \partial t.\, a - \text{F}.\, \frac{hu\, \partial t}{b}$, ita vt diuidendo per ∂t, habeatur:

$$\text{I.}\ \frac{ffv}{4g} \left[(u + v\, \text{coſ.}\, \alpha)^2 + v^2\, \text{ſin.}\, \alpha^2 - \left(\frac{cu}{b} + \frac{ffv\, \text{coſ.}\, \varepsilon}{ee}\right)^2 - \frac{f^4 v^2\, \text{ſin.}\, \varepsilon^2}{e^4} \right]$$
$$= ffav - \frac{\text{F}hu}{b},$$

quae eſt prima aequatio fundamentalis immediate ex principio virium viuarum deriuata.

§. 5. Altera aequatio, ad determinandum motum neceſſaria, petenda eſt ex aequilibrio momentorum, quae ad motum rotatorium tubi vel accelerandum vel retardandum tendunt; at particula aquea $ffv\, \partial t$ in A ſubintrans gaudet velocitate gyratoria abſoluta $= \frac{cu}{b} + \frac{ffv\, \text{coſ.}\, \varepsilon}{ee}$, momentoque $= \frac{ccu}{b} + \frac{cffv\, \text{coſ.}\, \varepsilon}{ee}$,

eius-

eiuſdemque particulae velocitas gyratoria, quum in D effluit, facta fuit $= u + v$ coſ. α, momentumque $= b\,u + b\,v$ coſ. α. Quum autem haec immutatio tempuſculo ∂t facta cenſetur, requiretur ad eam producendam momentum

$$= \frac{ffv\,\partial t}{2g\,\partial t} \times \left(b\,u + b\,v \text{ coſ. } \alpha - \frac{c\,c\,u}{b} - \frac{c\,f\,f\,v \text{ coſ. } \varepsilon}{e\,e}\right)$$

$$= \frac{bffv}{2g}\left[u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) + v\left(\text{coſ. } \alpha - \frac{cff \text{ coſ. } \varepsilon}{bee}\right)\right],$$

in ſenſu A A. Namque ſi maſſa m tempuſculo ∂t celeritatem c aequirere debeat, erit vis motrix, quae id efficiat, $= \frac{mc}{2g\,\partial t}$, et ſi inſuper vectes vis motricis et maſſae ſint diuerſi, ac in ratione $p : q$, erit tunc vis motrix $= \frac{mqc}{2gp\,\partial t}$, eiusque momentum $= \frac{mqc}{2g\,\partial t}$. At eſt inſuper pro noſtro caſu pondus eleuandum F, quod cum vecte h agit in directione H A, ideoque ad illud ſuperandum requiritur adhuc aliud momentum in directione A H $= \text{F}\,h$; quumque alia momenta non adſint, et ſyſtema ad ſtatum motus vniformis perueniſſe cenſeatur, oportet vt ſumma momentorum inuenterum ſit $= 0$, ideoque

$$\frac{bffv}{2g}\left[u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) + v\left(\text{coſ. } \alpha - \frac{cff \text{ coſ. } \varepsilon}{bee}\right)\right] + \text{F}\,h = 0,$$

ſiue multiplicando per $\frac{u}{b}$, et transferendo,

$$\text{II.} \quad -\frac{ffv}{2g}\left[u\,u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) + v\,u\left(\text{coſ. } \alpha - \frac{cff \text{ coſ. } \varepsilon}{bee}\right)\right] = \frac{\text{F}\,h\,u}{b},$$

quae eſt ſecunda aequatio fundamentalis quaeſita.

§. 6. Fiat nunc I + II, erit:

$$-\frac{ffvuu}{4g}\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) + \frac{ffv^3}{4g}\left(1 - \frac{f^4}{e^4}\right) = ff\,a\,v,$$

vnde elicitur

$$v\,v = \frac{4\,g\,a + u\,u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}},$$

et ſubſtituto hoc valore in aequatione II. inuenietur quoque valor effectus vtilis

$$\frac{Fhu}{b} = -\frac{ffuu}{2g}(1-\frac{cc}{bb})\sqrt{\frac{4ga+uu(1-\frac{cc}{bb})}{1-\frac{f^4}{e^4}}}$$

$$-\frac{ffu}{2g}(\text{coſ.}\,\alpha-\frac{cff\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{bee})\left(\frac{4ga+uu(1-\frac{cc}{bb})}{1-\frac{f^4}{e^4}}\right).$$

§. 7. Hi valores plane iidem ſunt cum illis quos habet Eulerus in §§. 53 et 54 Diſſertationis ſuae, modo attendatur litteras v et u, quae nobis ipſas celeritates deſignant, ipſi altitudines his celeritatibus debitas repraeſentare: et litteram g ibi nondum in computum duci ſolere.

§. 8. Alter caſus nunc quoque examinandus eſt, de quo §. 4. diximus, cum aqua in A ſuccedenda ſtagnans ponitur, quaeuis guttula autem, ſubito cum in A intrauerit, celeritates relatiuas $\frac{cu}{b}$ et $\frac{ffv}{ee}$ aſſumere cogitur. Guttula igitur eo momento, quo pars fit ſyſtematis gyrantis, nulla celeritate nullaque vi viua praedita eſt, ideoque euaneſcunt in prima aequatione termini $(\frac{cu}{b}+\frac{ffv\,\text{coſ}\,\varepsilon}{ee})^2$ et $\frac{f^4 v^2\,\text{ſin.}\,\varepsilon^2}{e^4}$, ſicque prodibit

$$\text{I.}\ \frac{ffv}{4g}[(u+v\,\text{coſ.}\,\alpha)^2+v^2\,\text{ſin.}\,\alpha^2]=ffav-\frac{Fhu}{b};$$

ſic etiam in altera aequatione euaneſcent termini $\frac{c^2 f^2 v u^2}{2gb^2}$ et $\frac{cf^4 v^2 u\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{2ge^2}$, et habebitur

$$\text{II.}\ -\frac{ffvuu}{2g}-\frac{ffv^2 u\,\text{coſ.}\,\alpha}{2g}=\frac{Fhu}{b},$$

ex quibus denuo habetur I + II,

$$-\frac{ffvuu}{g}+\frac{ffv^3}{4g}=ffav,\ \text{et}\ vv=4ga+uu,$$

at effectus vtilis

$$\frac{Fhu}{b}=-\frac{ffuu}{2g}\sqrt{(4ga+uu)}-\frac{ffu\,\text{coſ.}\,\alpha}{2g}(4ga+u^2),$$

qui iidem valores proueniſſent, ſi ſupra poſuiſſemus $c=0$ et $e=\infty$; id quod rationi ſatis conſentaneum eſt, namque ponendo

nendo $c = 0$ et $e = \infty$, velocitates in A etiam pro priori caſu ad nihilum rediguntur, ita vt tunc hic caſus cum poſteriori plane congruat.

§. 9. Cum autem pondus F eleuatur ad altitudinem $\frac{bu}{b}$, effluit et deſcendit per altitudinem a quantitas aquae $= ffv$, ita vt, quum eadem continuo ſufficienda ſit, pro priori caſu vis viua

$$\frac{ffv}{4g}\left(\frac{cu}{b} + \frac{f^2 v \text{ coſ. } \varepsilon}{e^2}\right)^2 + \frac{f^4 v^3 \text{ ſin. } \varepsilon^2}{4 g e^4}$$

pro potentia abſoluta, ad machinam in motu vniformi conſervandam requiſita, conſiderari debeat. Sic erit, ſubſtituto valore ipſius v, potentia abſoluta ad effectum vtilem ::

$$a + \frac{ccuu}{4gbb} + \frac{cffu \text{ coſ. } \varepsilon}{2gbee}\sqrt{\frac{4ga + uu\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}}$$

$$+ \frac{f^4}{4ge^4}\left(\frac{4ga + uu\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}\right) : - \frac{u}{2g}\left(\text{coſ. } \alpha - \frac{cff \text{ coſ. } \varepsilon}{bee}\right)$$

$$\sqrt{\frac{4ga + uu\left(1 - \frac{cc}{bb}\right)}{1 - \frac{f^4}{e^4}}} - \frac{uu}{2g}\left(1 - \frac{cc}{bb}\right),$$

et pro caſu poſteriori erit eadem ratio ::

$$a : - \frac{u \text{ coſ. } \alpha}{2g}\sqrt{(4ga + uu)} - \frac{uu}{2g}.$$

§. 10. Vix monere neceſſe eſt, ſigna negatiua hic ſemper occurrentia non offendere debere, quoniam inde tantummodo ſequitur, angulum α neceſſario recto maiorem accipiendum eſſe, quo $-$ coſ. α fiat poſitiuus; ideoque etiam interdum α ſtatim $= 180°$ aſſumitur, quo fiat $-$ coſ. $\alpha = + 1$, et effectus vtilis ſit maximus.

§. 11.

§. 11. Applicemus nunc hanc Theoriam, quo magis eius pateat vſus, ad machinam hydraulicam Cl. de Mour, ab Eulero in Actis Berolinenſibus Tom. VII. calculo ſubiectam. Tab. V. Fig. 4. Eſt ea tubus A M D circa axem verticalem A E debita celeritate gyrans, in quo aqua ſubtus per C *c* intrans, propter vim centrifugam aſcendit, et in D effluit. Hic igitur effectus vtilis conſiſtit in aqua ad altitudinem A E eleuata, potentia abſoluta autem in vi tubum mouente. Deinde hic caſus proprie pertinet ad §. 8., quoniam aqua in A ſubintrans requieſcere, necdum debita celeritate adiecta cenſetur. Pro a quoque ponendum eſt $-a$, cum aqua non deſcendat, ſed aſcendat. Coſinus $\alpha = 0$ et ſinus $\alpha = 1$, quia orificium effluxus D d plane ab axe eſt auerſum, et cum motu gyratorio angulum rectum conſtituit. Sic fit $vv = -4ga + uu$, et

$$\frac{Fhu}{b} = -\frac{ffuu}{2g}\sqrt{(-4ga+uu)};$$

atque effectus vtilis erit ad potentiam abſolutam

$$:: -a : \frac{-uu}{2g} :: a : \frac{uu}{2g}.$$

Sic quo minor celeritas u, eo maior erit machinae effectus, et aequalis foret potentiae abſolutae, ſi $uu = 2ga$ fieri poſſet. At ex aequatione $vv = -4ga + uu$ apparet, uu ſaltem $> 4ga$ eſſe oportere; ita vt, poſito $uu = 4ag$, fit $a : \frac{uu}{2g} :: 1 : 2$, quaſi aſymptoton rationis, quam effectus vtilis nunquam quidem attingere, ſed quantumuis eidem appropinquare poſſit. Quod idem quoque Cel. Eulerus in laudata diſſertatione inuenit.

§. 12. Caeterum quamuis in huiusmodi machinis motus vniformis, ad quem totum ſyſtema ordinarie mox componitur, praecipue ſpectari ſoleat: non ſuperfluum tamen erit motum quoque acceleratum indagare, tum quoniam ſic melius eius natura penetratur, atque perſpicitur, ſub quibus con-

conditionibus motus revera locum habere poſſit; tum etiam ne methodus iſta in ſuſpicionem defectus cuiusdam veniat.

§. 13. Sit itaque praeter denominationes iam allatas diſtantia ab axe motus pro puncto quocunque M tubi $= y$, ibique amplitudo $= zz$, et longitudo elementi Mm ſit $= \partial s$. Erit celeritas gyratoria eiusdem $= \frac{yu}{b}$, et celeritas qua aqua transfluit $= \frac{ffv}{zz}$. Vocetur nunc $= \omega$ angulus quem tubus in M cum directione motus gyratorii conſtituit, qui eſt analogus cum angulis α et ε extremitatum, et reſoluatur celeritas $\frac{ffv}{zz}$ in has duas $\frac{ffv\,\text{ſin.}\,\omega}{zz}$ et $\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}$, erit celeritas gyratoria abſoluta elementi aquae in $Mm = \frac{yu}{b} + \frac{ffv\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}$, et altera ad eandem perpendicularis $\frac{ffv\,\text{ſin.}\,\omega}{zz}$, ideoque cum maſſa elementi in Mm ſit $= zz\partial s$, erit eius vis viua Tab. V. Fig. 3.

$$= \frac{zz\partial s}{4g}\left(\frac{yu}{b} + \frac{ffv\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}\right)^2 + \frac{zz\partial s}{4g}\cdot\frac{f^4vv\,\text{ſin.}\,\omega^2}{4}.$$

Poſt tempuſculum ∂t translata erit particula Mm in mm', et alia particula in Mm ſuccedet, cuius velocitas gyratoria abſoluta erit

$$= \frac{y}{b}(u + \partial u) + \frac{ff\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}(v + \partial v),$$

alteraque perpendicularis $= \frac{ff\,\text{ſin.}\,\omega}{zz}(v + \partial v)$. Ideoque tunc vis viva in Mm erit

$$= \frac{zz\partial s}{4g}\left[\frac{y}{b}(u + \partial u) + \frac{ff\,\text{coſ}\,\omega}{zz}(v + \partial v)\right]^2$$
$$+ \frac{zz\partial s}{4g}\cdot\frac{f^4\,\text{in.}\,\omega^2}{z^4}(v + \partial v)^2.$$

Incrementum igitur vis vivae, quod in loco tubi Mm erit captum, aeſtimandum eſt $=$

$$\frac{zz\partial s}{4g}\left[\frac{y}{b}(u + \partial u) + \frac{ff\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}(v + \partial v)\right]^2$$
$$+ \frac{zz\partial s}{4g}\cdot\frac{f^4\,\text{ſin.}\,\omega^2}{z^4}(v + \partial v)^2 - \frac{zz\partial s}{4g}\left(\frac{yu}{b} + \frac{ffv\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}\right)^2$$
$$- \frac{zz\partial s}{4g}\cdot\frac{f^4\,\text{ſin.}\,\omega^2}{z^4}\cdot vv =$$
$$+ \frac{zz\partial s}{4g}\left[\frac{2y^2u\partial u}{bb} + \frac{2ffv\,\text{coſ.}\,\omega\, u\partial v + 2ffy\,\text{coſ.}\,\omega\,.\, v\partial u}{bzz} + \frac{2f^4v\partial v}{z^4}\right],$$

 ideo-

ideoque incrementum vis viuae pro toto tubo, (poſitis integralibus completis $\int\frac{\partial s}{zz}=L$, $\int y\,\partial s\,\text{coſ.}\,\omega=M$, $\int yyzz\partial s=N$,)

$$=\frac{N\,\partial\,.\,\frac{1}{2}uu}{2gb^2}+\frac{ffM\,\partial\,.\,vu}{2gb}+\frac{f^4L\,\partial\,.\,\frac{1}{2}vv}{2g},$$

cui addendum eſt adhuc incrementum in §. 4. iam inuentum, ex guttula quouis inſtanti influente et effluente oriundum,

$$=\frac{ffv\partial t}{4g}\left[(u+v\,\text{coſ.}\,\alpha)^2+v^2\,\text{ſin.}\,\alpha^2\right.$$
$$\left.-\left(\frac{cu}{b}+\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{ce}\right)^2-\frac{f^4vv\,\text{ſin.}\,\varepsilon^2}{c^4}\right].$$

Eodem vero tempuſculo ∂t pondus eleuandum F incrementum quoque capit vis vivae

$$=\frac{F}{4g}\cdot\frac{hh}{bb}\left[(u+\partial u)^2-u^2\right]=\frac{Fhh\,\partial\,.\,\frac{1}{2}uu}{2gbb},$$

ſic vt tandem integrum vis viuae augmentum tempore ∂t ſit =

$$\frac{N\,\partial\,.\,\frac{1}{2}uu}{2gb^2}+\frac{ffM\,\partial\,.\,vu}{2gb}+\frac{f^4L\,\partial\,.\,\frac{1}{2}vv}{2g}+\frac{Fhh\,\partial\,.\,\frac{1}{2}uu}{2gbb}$$
$$+\frac{ffv\partial t}{4g}\left[(u+v\,\text{coſ.}\,\alpha)^2+v^2\,\text{ſin.}\,\alpha^2\right.$$
$$\left.-\left(\frac{cu}{b}+\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{ee}\right)^2-\frac{f^4v^2\,\text{ſin.}\,\varepsilon^2}{e^4}\right],$$

quantitas vero deſcenſus actualis eadem manet, quam §. 4. inuenimus, $=ffav\partial t-\frac{Fhu\partial t}{b}$, ſic vt ſequens habeatur prima aequatio:

$$\text{I.}\quad\frac{N\,\partial\,.\,\frac{1}{2}uu}{2gb^2}+\frac{ffM\,\partial\,.\,vu}{2gb}+\frac{f^4L\,\partial\,.\,vv}{2g}+\frac{Fhh\,\partial\,.\,\frac{1}{2}uu}{2gbb}$$
$$+\frac{ffv\partial t}{4g}\left[(u+v\,\text{coſ.}\,\alpha)^2+v^2\,\text{ſin.}\,\alpha^2\right.$$
$$\left.-\left(\frac{cu}{b}+\frac{f^2v\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{e^2}\right)^2-\frac{f^4v^2\,\text{ſin.}\,\varepsilon^2}{e^4}\right]$$
$$=ffav\partial t-\frac{Fhu\partial t}{b}.$$

§. 14.

§. 14. Videamus nunc momenta, quae accelerationem tubi vel promouent vel impediunt. Erunt ſtatim momenta, quae iam §. 5. conſiderauimus, motum tubi retardantia,

$$\frac{bffv}{2g}\left[u\left(1-\frac{cc}{bb}\right)+v\left(\text{coſ.}\,\alpha-\frac{cff\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{bee}\right)\right]+F\,h.$$

Deinde quoduis elementum $Mm = zz\,\partial s$, cum habeat celeritatem gyratoriam abſolutam $\frac{yu}{b}+\frac{ffv\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}$, et poſt tempuſculum ∂t aliam

$$=\frac{y}{b}\,(u+\partial u)+\frac{ff(v+\partial v)\,\text{coſ.}\,\omega}{zz},$$

requirit ad hanc immutationem vim

$$=\frac{zz\,\partial s}{2g\,\partial t}\left(\frac{y\,\partial u}{b}+\frac{ff\,\partial v\,\text{coſ.}\,\omega}{zz}\right),$$

et momentum

$$=\frac{zzyy\,\partial s\,\partial u}{2g\,b\,\partial t}+\frac{ffy\,\partial s\,\partial v\,\text{coſ.}\,\omega}{2g\,\partial t},$$

cuius ſumma pro toto tubo eſt $=\frac{N\,\partial u}{2g\,b\,\partial t}+\frac{Mff\,\partial v}{2g\,\partial t}$. Denique pondus F, cum acquirat accelerationem $=\frac{h\,\partial u}{b}$, poſcit momentum $=\frac{Fhh\,\partial u}{2g\,b\,\partial t}$: quae omnia momenta igitur, ad retardandum tubum tendent. Nunc autem omnes maſſae mouendae in quadrata ſuarum diſtantiarum ab axe motus relatae ſunt,

$$\int zzyy\,\partial s+F\,hh=N+F\,hh,$$

et acceleratio velocitatis angularis gyratoriae exprimitur per $\frac{\partial u}{b}$; erit ergo ſecundum principia cognita:

$$\text{II.}\quad \frac{bffv}{2g}\left[u\left(1-\frac{cc}{bb}\right)+v\left(\text{coſ.}\,\alpha-\frac{cff\,\text{coſ.}\,\varepsilon}{bee}\right)\right]+F\,h$$
$$+\frac{N\,\partial u}{2g\,b\,\partial t}+\frac{Mff\,\partial v}{2g\,\partial t}+\frac{F\,hh\,\partial u}{2g\,b\,\partial t}=-(N+F\,hh)\,\frac{\partial u}{2g\,b\,\partial t}.$$

§. 15. Quod ſi autem pondus F non eſſet appenſum quod eleuetur, et contra momentum $=S$ extrinſecus ad accelerandum tubum applicaretur, proueniret haec aequatio:

$$S - \frac{bffv}{2g}\left[u\left(1 - \frac{cc}{bb}\right) + v\left(\text{coſ.}\ \alpha - \frac{cff\ \text{coſ.}\ \varepsilon}{bee}\right)\right]$$
$$- \frac{N\partial u}{2gb\partial t} - \frac{Mff\partial v}{2g\partial t} = \frac{N\partial u}{2gb\partial t},$$

quod perfecte conuenit cum §. 34. Euleri.

§. 16. Si aqua ſuperne nulla celeritate affluat, omittendi ſunt adhuc iidem termini, qui ante, et binae noſtrae aequationes erunt iſtae:

$$\text{I.}\ \frac{N\partial.\frac{1}{2}uu}{2gb^2} + \frac{ffM\partial.vu}{2gb} + \frac{f^4L\partial.\frac{1}{2}vv}{2g} + \frac{Fbb\partial.\frac{1}{2}uu}{2gbb}$$
$$+ \frac{ffv\partial t}{4g}[(u + v\ \text{coſ.}\ \alpha)^2 + v^2\ \text{ſin.}\ \alpha^2$$
$$= ffavdt - \frac{Fbu\partial t}{b},$$

$$\text{II.}\ \frac{bffvu}{2g} + v\ \text{coſ.}\ \alpha + Fb + \frac{N\partial u}{2gb\partial t} + \frac{Mff\partial v}{2g\partial t} + \frac{Fbb\partial u}{2gb\partial t}$$
$$= -(N + Fbb)\frac{\partial u}{2gb\partial t}.$$

§. 17. Euolutioni autem harum aequationum, conſequentiisque inde deducendis, haud amplius immoror, cum id a Cel. Eulero in citata Diſſertatione iam quantum ſatis factum ſit.

REMARQUES SUR UN PROBLÈME DE STATIQUE. ASSEZ CONNU

Par

NICOLAS FVSS.

Préſenté à la Conférence le 19 *Janvier* 1789.

§. 1.

En feuilletant les Leçons de Mathématique de M. Véga, qui viennent d'être préſentées à l'Académie (*), j'y ai trouvé une ſolution du Problème du pont-levis du Marquis de l'Hôpital qui m'a d'abord frappé par ſa longueur, par la prolixité de ſes calculs & par la forme compliquée de l'équation que l'auteur y donne pour la courbe d'équilibration. Je me ſouvins très-bien que le procédé du Marquis de l'Hôpital étoit extrèmement ſimple; mais n'ayant pas d'abord ſes ouvrages à la main, je me mis à traiter le Problème d'après une méthode qui m'eſt familière dans ces ſortes de queſtions. Mon intention n'etoit d'abord que de chercher l'équation de la courbe, afin de pouvoir la comparer avec celle de M. Véga que voici:

 $x \partial x$

(*) Vorleſungen über die Mathematik, zum Gebrauch des K. K. Artillerie-Corps, aufgeſezt von Georg Vega, Hauptmann ꝛc. Wien 1788. 3ter Theil, S. 284. u. f.

$$\frac{x\,\partial x + y\,\partial y}{c\,\partial x\,\sqrt{(xx+yy)}} = \sqrt{\frac{cc + 2c\sqrt{(xx+yy)} - xx - yy}{c^4 - 4cc\,(xx+yy) + 4c\,(xx+yy)^{\frac{3}{2}} - (xx+yy)^2}}.$$

L'Auteur paroît être incertain, s'il doit ſe fier à cette expreſſion, la voyant ſi différente des équations trouvées par d'autres Géomètres, à la fin cependant il panche à croire les autres ſolutions fautives & parle d'intégration par approximation de ſon équation differentielle. Comme les recherches que j'ai faites, à cette occaſion, ſur ce Problème, m'ont conduit à des obſervations qui ne me paroiſſent pas déſtituées de tout intérêt, je vais les détailler ici. Je préſenterai d'abord d'une manière plus aiſée la ſolution de M. Véga; enſuite j'en montrerai l'accord avec les ſolutions antérieures, en accompagnant ces recherches de deux ſolutions plus faciles & déduites de principes differens des ſiens.

Tab. VI. Fig. 3. §. 2. Soit B C un pont-levis dans ſa poſition naturelle horizontale, B M le pont levé, A une poulie, ſur laquelle paſſe une corde ou chaine M A *m*, dont un bout eſt attaché en M au pont convertible autour du point B & dont l'autre extrémité porte un contrepoids *m* qui gliſſe ſur la ligne courbe A*m*; cette courbe doit être telle que le poids *m* faſſe équilibre avec le pont, dans quelque poſition qu'il ſe trouve. Voici de quelle manière M. Véga traite ce Problème.

§. 3. Il ſuppoſe que le contrepoids ſe trouve en A lorsque le pont eſt baiſſé, dont il place le centre de gravité au point G, à la diſtance B G $=$ *b*. Il met la longueur de la corde C A $=$ M A *m* $=$ *c*, celle du pont B C $=$ B M $=$ *a* & les coordonnées de la courbe A *p* $=$ *x*, *p m* $=$ *y*. Il nomme le poids du contrepoids *m* en A $=$ Q & le poids du pont

pont $= p$ & il dit que $Q = p \frac{BG}{BD} = \frac{2bp}{c}$ & que ce contre-poids, en gliſſant ou roulant ſur la courbe, y exercera, ſelon la direction MA, une force $= \frac{Q\, ſin.\, m\mu\nu}{ſin.\, (m\mu\nu + pAm)}$, qui doit être en équilibre avec la force p. En mettant donc les momens égaux, on a

$$\frac{2bp}{c} \cdot \frac{BF\, ſin.\, m\mu\nu}{ſin.\, (m\mu\nu + pAm)} = p.\, BE$$

d'où l'on tire cette équation :

$$coſ.\, pAm + cot.\, m\mu\nu\, ſin.\, pAm = \frac{2b}{c} \cdot \frac{BF}{BE}.$$

qui, à cauſe de

$$coſ.\, pAm = \frac{Ap}{Am} = \frac{x}{\surd(xx + yy)};$$

$$ſin.\, pAm = \frac{pm}{Am} = \frac{y}{\surd(xx + yy)};$$

$$cot.\, m\mu\nu = \frac{\mu\nu}{m\nu} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

ſe transforme en celle-ci :

$$\frac{x\partial x + y\partial y}{\partial x \surd(xx + yy)} = \frac{2b}{c} \cdot \frac{BF}{BE}.$$

§. 4. Afin d'exprimer auſſi la fraction $\frac{BF}{BE}$ par x & y, M. Véga met $Am = \surd(xx + yy) = z$ & à cauſe de $AM = AC - Am = c - z$, il a $BF = \surd[aa - \frac{1}{4}(c - z)^2]$. Puis comme $BE = BG\, ſin.\, GBE = b\, ſin.\, ABM$, à cauſe de

$$coſ.\, ABM = \frac{2AB^2 - AM^2}{2AB^2} = \frac{2aa - (c - z)^2}{2aa} \;\&$$

$$ſin.\, ABM = \frac{(c - z)\surd[4aa - (c - z)^2]}{2aa},$$

on aura

$$BE = \frac{b(c - z)\surd[4aa - (c - z)^2]}{2aa},$$

& partant $\frac{BF}{BE} = \frac{aa}{b} \times \frac{1}{c - z}$, & l'équation deviendra

$$\frac{x\partial x + y\partial y}{\surd(xx + yy)} = \frac{c\partial x}{c - \surd(xx + yy)}.$$

§. 5. Voici la ſolution ſimplifiée de M. Véga. Au reſte on n'a qu'à diviſer le numérateur & le dénominateur de la fraction qui vient dans ſon équation après le ſigne radical, par le

le numérateur, & à extraire la racine quarrée, pour obtenir la même équation que nous venons de trouver. Quant à l'intégrale de cette équation, on la trouvera facilement après avoir multiplié par $c - \sqrt{(xx + yy)}$, car l'équation devient alors

$$\frac{c(x\partial x + y\partial y)}{\sqrt{(xx + yy)}} - (x\partial x + y\partial y) = c\partial x,$$

dont l'intégrale eſt ouvertement

$$c\sqrt{(xx + yy)} - \tfrac{1}{2}(xx + yy) = \Delta + cx,$$

équation qui convient, autant que je puis m'en ſouvenir, avec celle du Marquis de l'Hôpital. Voyons ce que donnera la ſolution ſuivante tirée du principe des tenſions.

§. 6. Soyent toutes les dénominations comme dans Tab. VI. Fig. 4. la ſolution précédente. Soit M la force que la peſanteur exerce ſur l'extrémité M du pont dans la direction M Z, & P la preſſion que le pont exerce ſur le point de converſion B (ou bien la force qui, par réaction, agira ſur le point M dans la direction M R) & ſoit Θ la tenſion de la corde M A *m* dont nous déſignerons la longueur par la lettre *c*, en nommant les portions A M = V & A *m* = *v*. Enfin pour la poſition du point M, nous nommerons l'abſciſſe A P = X, l'ordonnée P M = Y & l'arc A M = S.

§. 6. Ces dénominations établies, nous décompoſerons les forces qui agiſſent ſur le point M ſelon les directions des coordonnées X & Y & la tenſion Θ qui agit ſelon M A, donne.

une force ſelon $MX = \frac{\Theta X}{V}$;

une force ſelon $MP = \frac{\Theta Y}{V}$.

Les triangles M Y R & M $\nu\mu$ ſont ſemblables & cette ſimilitude nous fournit

$$MX = \frac{MR \cdot \mu\nu}{M\mu} \;\&\; MY = \frac{MR \cdot M\nu}{M\mu}.$$

La

La force P, qui agit ſelon M R, donnera donc
une force ſelon $MX = \frac{P\,\partial Y}{\partial s}$;
une force ſelon $MY = \frac{P\,\partial X}{\partial s}$.

§. 8. Le point M eſt donc ſollicité dans la direction verticale M X par une force $= \frac{\Theta X}{V} - M + \frac{P\,\partial Y}{\partial s}$, & dans la direction horizontale M P par une force $= \frac{\Theta Y}{V} - \frac{P\,\partial X}{\partial s}$. Il faut donc faire évanouir ces deux forces, ce qui donne deux équations

$$\frac{\Theta X}{V} - M + \frac{P\,\partial Y}{\partial s} = 0,$$
$$\frac{\Theta Y}{V} - \frac{P\,\partial X}{\partial s} = 0.$$

La dernière équation fournit

$$P = \frac{\Theta Y\,\partial s}{V\,\partial X} = 0,$$

& la première donne

$$M = \frac{\Theta}{V\,\partial X}(X\,\partial X + Y\,\partial Y) = \frac{\Theta\,\partial V}{\partial X},$$

à cauſe de $XX + YY = VV$.

§. 9. Si l'on traite de la même manière les forces qui agiſſent ſur le contrepoids m, la force de la peſanteur, qui agit dans la direction mz, étant indiquée par la lettre m & par p la réaction de la preſſion qui agit ſelon mr perpendiculairement à la courbe, & par x & y les coordonnées de celle-là, on obtiendra par un procédé ſemblable $m = \frac{\Theta\,\partial v}{\partial x}$.

§. 10. De ces deux expreſſions nous déduiſons

$$\frac{M}{m} = \frac{\partial V\,.\,\partial x}{\partial v\,.\,\partial X}.$$

Or $V + v = c$, donc $\partial V = -\partial v$ & partant $\frac{M}{m} = -\frac{\partial x}{\partial X}$, ou bien $M\,\partial X + m\,\partial x = 0$, équation dont l'intégrale eſt $M.X + m.x = C$, ou bien $mx = C - M.X$. Or l'arc A M étant un arc de cercle, on a $PM = Y = \sqrt{(2aX - XX)}$ & partant $XX + YY = VV = 2aX$, donc

$$X = \frac{vv}{2a} = \frac{(c-v)^2}{2a} = \frac{[c-\sqrt{(xx+yy)}]^2}{2a},$$

& en ſubſtituant cette valeur, l'équation pour la courbe cherchée ſera

$$mx = C - \frac{Mcc}{2a} + \frac{Mc}{a}\sqrt{(xx+yy)} - \frac{M}{2a}(xx+yy),$$

que nous repréſenterons ainſi :

$$\Delta + cX = \frac{Mc}{ma}[c\sqrt{(xx+yy)} - \tfrac{1}{2}(xx+yy)],$$

où $\Delta = \frac{Mc^3}{2am} - \frac{cc}{m}$. Cette équation, plus générale que celle de la ſolution précédente, conviendra parfaitement avec l'autre, dans le cas où $M : m = a : c$.

§. 11. Cette ſolution a donc non ſeulement l'avantage d'être plus facile que la ſolution de M. Vega, attendu qu'on n'y eſt point obligé de paſſer par tant de ſubſtitutions laborieuſes; mais elle eſt auſſi plus générale, vu qu'elle tient compte des poids M & m. Elle eſt même beaucoup plus générale qu'on ne croit d'abord, & conduit, ce qui plus eſt, à une ſolution de la plus grande ſimplicité & qui s'expédie presque ſans calcul, c'eſt ce que nous allons expliquer plus clairement.

§. 12. En conſidérant attentivement l'équation trouvée ci-deſſus §. 10, ſavoir $M . X + m . x = C$, elle nous rappellera d'abord dans la mémoire un principe de Statique très-connu : *Que le commun centre de gravité de deux ou pluſieurs corps qui dans leur mouvement ſe tiennent en équilibre, ne doit ni monter ni deſcendre.* Si nous fuſſions parti de ce principe, nous ſerions d'abord parvenu à notre équation. Car ſi nous tirons par A, ou par tout autre point à volonté, la droite horizontale D E, & que nous érigeons du commun centre de grauité, auſſi bien que des points M & m, les perpendiculaires G H, M X & my, on fait que $M . MX + m . mx = (M+m)$ G H. Or G H doit être conſtant d'après le principe mentionné, par conſéquent on a $M . X + m . x = C$.

Tab. VI. Fig. 5.

§. 13.

§. 13. Voilà donc ſans le moindre calcul, une ſolution de notre Problème, qui s'étend même beaucoup plus loin, parce qu'elle contient auſſi la ſolution du Problème ſuivant : *Une corde M A m, de longueur donnée, paſſe ſur une poulie placée en A. Elle porte à ſes extrémités deux poids M & m dont le premier gliſſe librement ſur une courbe donnée A M; on demande la courbe A m, ſur laquelle doit gliſſer l'autre corps m, de façon que, dans quelque poſition que ſoyent les deux corps, ils faſſent toujours équilibre.* La ſolution de ce Problème dis-je, que Jean Bernoulli avoit déjà obſervé pouvoir être réſolu moyennant le principe mentionné, eſt contenue dans l'équation $m x = C - M X$. Car la courbe A M étant donnée, X ſera donné par V, V ſera donné par v, & v par x & y, de ſorte qu'on aura toujours pour la courbe cherchée A m une équation entre x et y. Nous allons éclaircir ceci par l'application de notre équation générale à quelques uns des cas déterminés les plus ſimples.

§. 14. Suppoſons que le poids M deſcende ſur un plan incliné A M, qui faſſe avec la verticale A B un angle B A M $= \alpha$, nous aurons Tab. VI. Fig. 7.

$$AP = X = V \operatorname{coſ.} \alpha = (c - v) \operatorname{coſ.} \alpha = [c - \sqrt{(x x + y y)}] \operatorname{coſ.} \alpha,$$

d'où réſulte cette équation pour la courbe A m qu'on demande:

$$m x = C - M c \operatorname{coſ.} \alpha + M \operatorname{coſ.} \alpha \sqrt{(x x + y y)}$$

qui, en mettant pour abrêger $- C + M c \operatorname{coſ.} \alpha = D$, prend cette forme :

$$y y = \frac{m m - M M \operatorname{coſ.} \alpha^2}{M M \operatorname{coſ.} \alpha^2} x x + \frac{2 m D x}{M M \operatorname{coſ.} \alpha^2} + \frac{D D}{M M \operatorname{coſ.} \alpha^2},$$

qui eſt pour l'Hyperbole, lorsque $m > M \operatorname{coſ.} \alpha$ & pour l'Ellipſe, lorsque $m < M \operatorname{coſ.} \alpha$. En prenant les abſciſſes du centre, c'eſt-à-dire, en mettant $x - \frac{m D}{m m - M M \operatorname{coſ.} \alpha^2}$ à la place de x, l'équation prendra cette forme:

$$y y = \frac{m m - M M \operatorname{coſ.} \alpha^2}{M M \operatorname{coſ.} \alpha^2} x x - \frac{D D}{m m - M M \operatorname{coſ.} \alpha^2}$$

&

& les demiaxes ſeront

$$\frac{D}{\sqrt{(mm - MM\, coſ.\, \alpha^2)}} \quad \& \quad \frac{MD\, coſ.\, \alpha}{mm - MM\, coſ.\, \alpha^2}.$$

Tab. VI. Fig. 6. Il eſt évident que la même courbe ſatisfera auſſi au cas où le poids M deſcend verticalement le long de A B. Car en mettant $\alpha = 0$, on a

$$yy = \frac{m^2 - M^2}{M^2}\, xx - \frac{DD}{m^2 - M^2}.$$

Fig. 8. §. 15. Suppoſons que la courbe donnée ſoit un cercle, dont le rayon $BA = BM = a$, & nous aurons le cas du pont-levis déjà expédié ci-deſſus §. 10. L'équation pour la courbe ſera donc, comme nous avons vu:

$$\Delta + cx = \frac{Mc}{ma}\left[c\sqrt{(xx+yy)} - \tfrac{1}{2}(xx+yy)\right]$$

& la courbe une Epicycloïde engendrée par le mouvement d'un cercle ſur un autre cercle de même rayon, propriété que Jean Bernoulli a été le premier à démontrer.

§. 16. Soit la courbe donnée une Parabole contenue dans l'équation $YY = 2pX$, & nous aurons

$$XX + YY = VV = XX + 2pX,$$

d'où l'on tire $X = -p + \sqrt{(pp + VV)}$, ou bien

$$X = -p + \sqrt{pp + (c-v)^2} = -p + \sqrt{pp + [c - \sqrt{(xx+yy)}]^2}.$$

L'équation pour la courbe cherchée A m ſera

$$mx = C + Mp - M\sqrt{pp + [c - \sqrt{(xx+yy)}]^2}$$

ou bien, en mettant pour abréger $C + Mp = D$ & $pp + cc = kk$, cette équation prendra la forme ſuivante:

$$(mx - D)^2 = M^2[kk - 2c\sqrt{(xx+yy)} + xx + yy].$$

Courbe algébrique du quatrième ordre. Au reſte il eſt évident que ſi la courbe donnée eſt algébrique, l'autre courbe le ſera néceſſairement auſſi.

PHY-

PHYSICA.

NOUVELLES OBSERVATIONS ET EXPÉRIENCES SUR L'IRRITABILITÉ DES ETAMINES DE L'EPINE-VINETTE (BERBERIS VULGARIS. L.)

Par le

D. *JOSEPH. G. KOELREUTER.*

Traduit de l'Allemand par M. l'Adjoint Sewergin,

Préſenté à l'Académie le 17 *Décemb.* 1788.

En examinant avec attention, il y a plus de 16. ans (c'étoit au commencement du Mois de Mai de l'année 1772.) la propriété de cet Arbriſſeau indigène, propriété ſi remarquable, & que pluſieurs Auteurs ont déja obſervée, en vertu de la quelle ſes Etamines s'approchent du Piſtil à la moindre irritation, qu'on leur a fait éprouver exterieurement; j'ai trouvé tant pour la ſtructure & la ſituation de ces Etamines, que pour leur mouvement même, pluſieurs choſes, qui ſont encore tout-à-fait inconnues, & qui meritent ſans doute d'être expoſées aux ſçavants. Voici là-deſſus mes découvertes, qui offrent certainement de grandes lumieres dans cette eſpèce d'irritabilité des végétaux.

Pen-

Pendant qu'une fleur de notre Epine-vinette *a*) eſt encore parfaitement fermée, mais deja toute prête à éclôre, les étamines forment un angle un peu aigu avec le Piſtil, ayant en même tems une direction oblique au dehors. Leurs ſommets ſont encore unis entre eux, & les étamines indifferentes à toute irritation quelconque.

Mais les étamines de ces fleurs n'ont proprement pas ces deux ſommets, que le celebre Chevalier de Linnée leur attribua autre fois *b*) au contraire chaque étamine de l'Epine-vinette, comme celles de presque toutes les autres plantes, n'en a plutôt qu'un, mais dont les deux bourſes ſont viſiblement ſeparées l'une de l'autre par une barriére un peu large.

Une choſe bien ſinguliére, c'eſt que les bourſes ici ne s'ouvrent pas à la longue par une fente, qui ſe dilate peu à peu de bas en haut, comme cela arrive dans le plus grand nombre des autres plantes; mais la membrane extérieure ſe dégage d'autour de la barriére, qui ſe trouve entre elles, s'éleve avec la plus grande partie de la pouſſiére, qui lui reſte attachée par dedans, & préſente enfin ſa ſurface intérieure à la tête du piſtil, qui eſt vis à vis d'elle. Auſſitôt qu'elles ſe ſont parfaitement ouvertes elles ont l'air de repreſenter ſur chaque filament deux lames obrondes, & applaties, dont la ſurface intérieure, toute couverte de pouſſière eſt tournée vers la tête du piſtil. Auſſi reſte-t-il communement au deſſous d'elles & de chaque côté un peu de la pouſſière attachée à la

a) Le Berberis orient. de Tournefort, qui n'eſt peut être, qu'une varieté de notre Berberis vulgaris, me fit voir dans toutes les circonſtances, les mêmes phénomenes.

b) Voyez Linn. Gen. pl.

la pointe de l'étamine la plus epaiſſe, qui forme proprement la barriére, dont j'ai parlé.

C'eſt par ce méchanisme excellent, que la Nature parvient parfaitement à ſon but d'aſperſion de la pouſſiére; car les étamines profitent par là en longueur autant, qu'en accompliſſant avec vivacité leur union au piſtil, leur bourſes peuvent ſûrement atteindre & toucher la tête de ce piſtil, qu'elles ont à charger de pouſſiére; ſi au contraire elles s'ouvroient de la maniere commune, les étamines ſeroient évidemment trop courtes pour cela.

Si l'on coupe toutes les petales & les feuilles du calice, à une fleur encore toute fermée, mais qu'on les laiſſe d'ailleurs, ſans les gater, attachées aux pedicules par leurs parties inferieures, on remarquera que bientôt les étamines deviennent peu à peu plus longues, & s'élargiſſent dans une ſituation presque horizontale, en formant en même tems un angle presque droit avec le piſtil, & commencent à rendre la pouſſiére de la maniere, dont j'ai fait mention. Bientôt aprés elles s'inclinent & forment une maniere de courbe un peu applatie, dont la partie concave eſt la ſurface inférieure de l'étamine, & la partie convexe ſa ſurface ſupérieure. C'eſt dans cette ſituation, qu'elles commencent à éxercer leur irritabilité, qui cependant ne vas pas plus loin, qu'auſſitôt, qu'elles ſont irritées, alors elles ſe dreſſent, & s'approchent du piſtil, en formant avec lui un angle un peu aigu, comme auparavant.

Les étamines dans leur ſituation naturelle & parfaite, ſont toujours tendues, autant que les petales, qui ſont presque toujours à demi fermées le leur permettent, & par leurs lames, qui donnent la pouſſiére, elles s'appliquent comme ſous une voute ſur les bords des petales, qui ſont recourbées en

 de-

dedans au deſſus d'elles. Alors ſi l'on irrite ou chatouille légèrement leur ſurface tant extérieure, qu'intérieure avec la pointe d'un canif, ou un foible pinceau, elles ſont dans l'inſtant un mouvement doux, mais rapide, pour atteindre la tête du piſtil, & en ſe recourbant viſiblement, elles appliquent leurs lames, dont la partie intérieure eſt couverte de pouſiére, ou contre la tête du piſtil même, qui eſt plus verte & reſſemble à un noeud, ou principalement contre ſes bords éminents, & qui ſont d'une nuance plus pâle & dans ce cas il y reſte presque toujours un peu de pouſſiére attachée.

Aprés qu'une des ſix étamines a exercé ce mouvement, elle attire auſſi tôt un peu à elle la petale, qui lui convient, & au fond de la quelle elle eſt attachée par ſa partie inférieure. Et voila ce qui cauſe, qu'une fleur aſſez ouverte, quand on a promtement irrité & mis en mouvement toutes ſes étamines, elle ſe preſente bientôt aprés comme a demi fermée.

Dans quelque endroit, qu'on touche les étamines, elles laiſſent toujours appercevoir cette irritabilité; cependant je crois avoir en general aſſez clairement reconnu, qu'elles en poſſedent plus à leur partie inférieure, que plus haut, ou aux bourſes, que j'ai ſouvent aſſez rudement touchées & remuées ou méme coupées, ſans qu'elles aient operé le moindre mouvement, quoiqu'elles en manifeſtaſſent bientôt après, ſi on les touchoit plus bas.

Mais à peine le mouvement des étamines vers le pistil a-t-il ceſſe, qu'elles commencent auſſi tôt à s'en eloigner conſidérablement & à s'étendre tout droit. De plus, ſi l'irritabilité des étamines a atteint un très haut degrés, on les voit bien diſtinctement s'éloigner jusqu'à quelque diſtance de

la

la tête du piſtil ; mais enſuite ce paſſage devient toujours de plus en plus lent, & moins appercevable, jusqu'à ce qu'elles aient repris leur repos parfait & ſe ſoient tout à fait remiſes à la place, qu'elles occupoient auparavant, c'eſt à dire ſous la voute des petales, ce qui s'acheve ſouvent dans quelques minutes, mais quelque fois dans un quart d'heure, ou même dans un quart d'heure & demi, ſuivant que la fleur eſt plus ou moins fraiche & plus ou moins vive, & le tems plus ou moins chaud ou froid. Mais après avoir pris quelque repos, elles ſe laiſſent mouvoir de nouveau, ce que l'on peut dans un jour repeter pluſieurs fois ſur la même fleur. Ainſi cette obſervation, que j'ai très ſouvent repetée, & qui eſt ſuffiſamment prouvée, eſt tout à fait en contradiction avec les obſervations des Mrs. du Hamel *c*), Adanſon *d*), & de Münchhauſen *e*), qui veulent nous prouver, que les étamines ne reviennent point à la place, qu'elles occupoient auparavant ni qu'elles ſoient capables de répéter ce mouvement. On n'apperçoit même jamais aucun mouvement dans les étamines, ſi l'on a doucement & avec précaution recourbé les petales, comme l'atteſte le dernier de ces auteurs célébres ; ni même encore, ſi l'on a oté avec précaution toutes les feuilles du calice & les petales ; & dans ce cas il ne s'opere, que, ſi faute de précaution, l'on a avec ſon inſtrument ou immediatement ou par le moyen des petales même touché, & remué un peu l'étamine, & ſi par conſéquent on l'a mis en mouvement. Et cela eſt ſi vrai, que ſi l'on a avec précaution privé la fleur de ſes deux couvertures, les étamines ne

 ceſſent

c) Du Hamel. Traité des arbres & les arbuſtes. Partie I. pag. 72.

d) Adanſon. Famille des plantes. Tom. I. p. 59.

e) Hausvater. 3ter Theil. S. 440. & du Roi. Harbk. wilde Baumzucht. 1ter Theil. S. 77.

ceſſent pas d'éxercer, ſans aucun empéchement, leur mouvement, auſſitôt qu'elles ont été irritées, quoique dans ce cas là, ſi on veut le répéter encore une fois, il n'eſt plus ſi vif, ni ſi parfait, qu'il l'étoit la premiere fois, & cela apparemment parceque la ſécrétion des ſucs, qui ſe fait pendant cette operation dans les endroits attaqués, ôte aux étamines la force neceſſaire.

Si l'on retire fortement l'étamine dans le moment qu'elle a été miſe en mouvement, & qu'elle s'avance vers la tête du piſtil, elle s'élance brusquement vers lui de nouveau, dés qu'on la laiſſe en liberté. Mais on voit en même tems, que cela ne s'opere qu'en vertu de ſon élaſticité, & non par une force active, qui ſoit reveillée par l'irritation.

Si au contraire on les irrite de nouveau, après qu'elles ont deja achevé leur retour jusqu'à quelque diſtance, alors en vertu de leur force d'irritabilité, qui s'eſt renouvellée dans cette intervalle, elles s'élancent de nouveau vers la tête du piſtil, non plus cependant, comme il me ſembloit, avec cette vivacité, qu'elles ſont voir communement, aprés qu'elles ſe ſont parfaitement repoſées, & qu'elles ont repris leurs forces.

Les fleurs ſoutiennent d'ailleurs un choc aſſez fort, ſans que les étamines ſe mettent en mouvement, meme ſi elles y ſont diſpoſées. Et quoique l'on ſouffle dans la fleur avec beaucoup de force, elles reſtent néanmoins indifferentes comme auparavant. Mais ſi l'on y fait entrer le vent, avec la plus grande force poſſible, alors elles s'approchent bien vîte du piſtil. Une goutte d'eau, que l'on y introduit doucement ne les met pas non plus en mouvement.

Mais

Mais les étamines éxercent leur mouvement dans toutes les circonſtances, & dans tous les cas poſſibles, & toujours dans la même direction, c'eſt à dire toujours directement vers le piſtil.

Elles retiennent cette irritabilité même après qu'on leur a ôté leurs ſommets, & quoiqu'elles en ſoient privées, elles ne laiſſent pas d'éxercer leur mouvement. Elles ne ſont pas non plus empechées dans leur mouvement, après que l'on a ôté la tête du piſtil, ou même le piſtil entier.

Si on les irrite par exemple avec une aiguille fine, & que dans le même moment on les empêche d'exercer leur mouvement, alors, ce qui eſt en effet remarquable, elles reſtent immobiles dans l'endroit, ou elles étoient, quand on les a empeché de ſe mouvoir, ne partant pas même au delà de l'épaiſſeur d'un cheveu, quoiqu' un moment après on leur ait rendu toute la liberté. C'eſt à ce qu'il me ſemble entre autres preuves, l'argument le plus concluant, que ce mouvement n'eſt pas l'effet de l'élaſticité, mais qu'il doit ſon origine à une force vitale, dont l'action néanmoins eſt ſi foible & de ſi peu de durée, qu'il ne vas pas à beaucoup près à une minute, & peut être empeché par la moindre réaction.

Si on les expoſe au foyer d'un verre ardent ordinaire, elles ſe mettent en mouvement, comme ſi elles étoient touchées de quelque corps. Elles ſe retirent même, ſi elles n'ont pas trop ſouffert, & ſe laiſſent après quelques moment mouvoir de nouveau par une irritation quelconque. On remarque le même phénomène, après qu'on les a privées des feuilles du calice & des petales.

Quelque fois, ſur tout ſi leurs forces ſe ſont déjà un peu affoiblies, ou ſi l'attouchement n'a pas été aſſez fort, elles

ne ſe mettent en mouvement par l'irritation, qu'on leur a fait éprouver, qu'après quelques minutes.

Si on électriſe les fleurs, & qu'en approchant un flacon de Métal, on en tire des étincelles, les étamines s'avancent rapidement jusqu'au piſtil. La même choſe arrive, ſi on leur tient intérieurement, ou extérieurement une aiguille de Métal tranchante, parceque l'effet de cette aiguille eſt de procurer à la matière éléctrique un paſſage plus libre & plus doux. Et cela arrive encore, ſi l'on fait paſſer dans une fleur quoique non éléctriſée de petites étincelles d'un flacon ou aiguille éléctriſée. Mais au contraire ſi n'étant pas éléctriſée on la met ſur une table de Métal, & qu'on la tienne au près d'un flacon éléctriſé fortement avec la machine éléctrique, les étamines ne ſe mettent point en mouvement, même par une forte commotion, probablement parceque la matière éléctrique paſſe plutôt dans le corps métallique, qui en eſt plus proche, que dans le corps végétal. Mais ſi l'on oblige la matiere éléctrique de paſſer dans la table metallique immédiatement par le bouquet de fleurs, on n'entend qu'une exploſion foible & ſourde, qui ne les empêche pas de reſter immobiles ainſi qu'auparavant.

Les étamines ne ſe mettent jamais en mouvement, qu'elles ne ſoyent irritées extérieurement; par conſéquent dans toutes les fleurs, qui pendant tout le tems de leur floraiſon ne ſeroient pas irritées, les filets reſteroient toujours tendus dans la diſtance ordinaire du piſtil, & par conſéquent elles ne pourroient être fecondées. Voila donc par quel moyen actif & ſûr, l'intelligence ſuprême a ſçu mouvoir les étamines de cette fleur & favoriſer la propagation de cet arbriſſeau ſi utile! Tout le myſtère s'explique par la ſtructure particuliére de

de ces fleurs, & par la grande utilité, que d'autres créatures, qui ont auſſi leur part à la ſomme du bien de ce monde, en ſavent tirer.

Chaque petale de cette fleur a près de ſa baſe deux glandules nectarifères oblongues, de couleur jaune-aurore, & de forme convexe, qui à leur baſe ſe rapprochent l'une de l'autre, mais qui s'éloignent dans leur partie ſuperieure. Entre chaque paire de ces glandules nectarifères eſt attaché un filament, qui dans ſon état parfait & naturel eſt tellement tendu, que par ſon bout inférieur il ne remplit que leur intervalle, & laiſſe les glandules libres. Ainſi dès qu'un inſecte (& il en vient beaucoup pendant le jour) veut ſuçer & gouter du Nectar, qui diſtile par ces glandules pendant l'activité de la fleur, il lui eſt presque impoſſible d'éviter, qu'avec ſa trompe, ou quelque autre partie de ſon corps, il ne touche dans les efforts, qu'il fait, l'étamine, qui lui fait obſtacle, & principalement ſa partie inférieure, qui eſt beaucoup plus ſenſible, & dans ce cas l'étamine ſe met dans l'inſtant en mouvement, & couvre de ſa pouſſiére fécondante la tête du piſtil, partie féminine de la fleur.

Les inſectes, qui ſe nourriſſent de l'arbriſſeau ſont de divers genres & de différentes eſpéces, mais j'ai particuliérement obſervé, que ce ſont des eſpéces de grands & de petits Eſcarbots, diverſes mouches, des Abeilles & des guèpes, que l'on y voit en chercher & ſuçer avidement le Nectar; & j'ai pû voir à chaque moment le mouvement, qu'ils produiſoient pas leurs efforts tantôt ſur une étamine, tantôt ſur l'autre, & opéroient ainſi avec beaucoup de zèle la fécondation en occaſionnant l'expenſion de la pouſſiére des étamines.

C'eſt

C'eſt ainſi, que la nature parvient à ſon but de fécondation & de propagation de notre arbriſſeau par le moyen de ces petites créatures, que pluſieurs faux philoſophes ont regardé, avec tant d'ignorance, comme des êtres inutiles. Ces animaux en gouttant avec délectation le mets le plus doux, trouvent non ſeulement leur propre avantage, mais ils préparent en même tems, ſans le ſavoir, un aliment futur tant pour la poſterité de leur propre eſpèce, que pour tant d'autres créatures, avant leur éxiſtence. Voila un nouvel exemple, & qui jusqu'à ce jour n'a point été remarqué, qui nous prouve clairement l'intimité entre le regne animal & le regne végétal & la néceſſité de leur connexion dans l'oeconomie de la Nature.

DE

DE

ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Diſſertatio X.

DE

STRATO SECVNDO FIBRARVM

VENTRICVLI SINISTRI.

PARS I.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. die 28 *Sept.* 1789.

Quamuis de ſtratis fibrarum in vniuerſum iam ſcripſerim; varia tamen haud parui momenti de diſpoſitione eorum in vniuerſum monenda adhuc ſupereſſe video. Haec tamen, vti facilius intelligentur, poſtquam ſingulae, quae fabricam ventriculorum ingrediuntur, fibrarum fasciae et fasciculi, quae tanquam totidem ſcilicet diuerſi musculi conſiderandae ſunt, deſcriptae erunt; ad poſtremos labores reſeruo, quibus et alia plurima, vel augenda, vel corrigenda, ſuperfutura eſſe, nullus dubito. Quo magis enim in eruenda fabrica cordis progredior, eo plura continuo ſe offerre video eruenda, eoque maiores fere occurrere difficultates. Neque aliter, niſi multis laboribus, ſaepe irritis, ſaepe iterandis, ſaepe corrigendis, hanc anatomiae par-

ticulam indagari poſſe opinor. Nunc poſtquam externas fibras ventriculi ſiniſtri, vti exutis integumentis apparent, in tabulis prioribus exhibui, in diſſertatione quarta deſcripſi; eas ſequentibus tabulis offero, deſcriboque, fibras, quae illis externis abductis in conſpectum prodeunt, easque tanquam ſecundum ſtratum conſidero, quamuis aliter forte reſpectu ſtratorum, ad quae fibrae pertineant, iudicandum eſſet. Sufficiet, has fibras non modo ſic, vti repraeſentatae in iconibus, vti in diſſertatione deſcriptae, exiſtere in ventriculo ſiniſtro; ſed iis quoque in ſedibus eſſe collocatas, vt remotis, quae primum abductis integumentis apparent, continuo ſe offerant, ab illisque immediate tegantur.

Stratum ſecundum ventriculi ſiniſtri vti a medio dextri differat.

Externis fibris remotis minor quidem ventriculus ſiniſter, vix mollior tamen, reſtat; cum pluribus ſtratis interioribus inſtructus, vbique eandem fere, qua integer gaudet, duritiem firmitatemque praebeat. Neque figura inſigniter mutata eſt. *a*) Et ipſum ſtratum ſecundum aliter ac medium ventriculi dextri firmum non modo denſisque et compreſſis fibris conſtructum, ſed integrum quoque quodammodo eſt, vt tanquam completus ventriculus denuo, externis etiam exutus fibris, appareat. Quamuis enim, qui proximam apici ſedem in ſtrato ſecundo tegunt, fasciculi terminales *b*) in ſtrato etiam externo hanc ſedem occupant *c*), adeoque ad ſtrati externi fibras merito referuntur; communes tamen illi, cum ſoli ventriculum in ea ſede claudant, omnium potius ſtratorum fibrae, quam propriae

a) Tab. VII. F. G. H. I.
b) Tab VII. 50. 51. 52. 53.
c) Tab. IV. 103. 104.

priae ſtrati externi, cenſendae eſſe videntur. Sola apertura ventriculi *a*) ad apicem in inferiori imprimis ſuperficie, de qua in ſequentibus dicam, quo minus omnino completus ſit ventriculus, obſtat. Aliter tamen longe ſe res habet in medio ſtrato ventriculi dextri *b*), vbi defectus fibrarum vbique, ad marginem, ad apicem, ad crenam, continuo apparent; vt ſolum hoc ſtratum intuendo facile intelligas, nullum interius ſupereſſe aliud, niſi, quae internam ventriculi ſuperficiem inueſtiant, fibras, aut quae reticularem efficiant eius ſtructuram cenſeas. Et multum abeſt igitur, quin velut ſiniſter integer ille et totus ventriculus, exutus ſuo ſtrato externo, videri poſſit.

Diſpoſitio fibrarum ſtrati ſecundi definita et comparata cum diſpoſitione fibrarum ſtrati externi. Fibrarum ſtrati externi diſpoſitio.

Vti ſic ſenſim in variis ventriculorum ſtratis fibrae directionem ſuam mutant, vt eandem demum ſemitam legendo fibrae vltimorum ſtratorum eo rurſus redeant, vnde primorum fibrae erant productae; notabili iam gradu fibrae ſtrati ſecundi a primi ſtrati fibris directionis reſpectu differunt. Harum fibrarum diſpoſitio autem vt accuratius definiri et comparari poſſit cum diſpoſitione fibrarum externarum, ex earundem deſcriptionibus quaedam hic repetenda ſunt. Iſtae ſic diſpoſitae erant, vt dimidia quaſi pars earum, ordo ſcilicet primus et ſecundus *c*), vbi ex ſedibus ſuis ſingulae fibrae ortae eſſent, proprias et inſertionis ſedes ſingulae fere inuenirent *d*); ambitu inſertionis, ſtria cum faſciculo terminali inferiori ad centrum focorum vsque *e*), haud multum longitudine cedente ambitui

 ori-

a) Tab. VII. 54. Tab. IX. 23. 24.
b) Tab. VII. A. B. C. D.
c) Tab. VI. y. 13. 24. Tab. IV. Q. D. R. 105.
d) Tab. VI. y. 46. 75. 78.
e) Tab. VI. y. 12. 80.

originis, filis ſcilicet cartilagineis ſiniſtris, partique, qua funes vltimi oriuntur, baſis aortae *a*); reliqua pars dimidia contra, ordines complectens tertium et quartum *b*) ad ſe mutuo, vbi ex ambitu ſuae originis, ſtria, ortae fibrae eſſent, et ad fibras priores, ſenſim conuergendo, ſe applicarent, ſub easque ſe reciperent *c*), ambitu inſertionis omnium fibrarum externarum ventriculi prioribus iam fibris ordinum primi et ſecundi occupato. Sic prior pars fibrarum, quaſi dimidia, ambitum totum inſertionis occupat, fibris haud omnino, at maximam tamen partem, parallelis, ambitu inſertionis ambitui originis aequali. Altera dimidia pars ſub priores partim ſe recipit, partim in ipſam ambitus inſertionis extremitatem vna cum vltimis priorum concurrit, fibras efficiendo radiatas. Haec ſingularis et propria diſpoſitio eſt fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri. In dextro ventriculo niſi omnino parallelae fibrae feruntur, parum tamen tantum aut diuergendo aut conuergendo a ſolito ſimplici fibrarum progreſſu declinant.

Diſpoſitio fibrarum ſtrati ſecundi, quo vsque cum externo conuenit.

Simili externarum modo et fibrae diſpoſitae ſunt ſtrati ſecundi. Alia earum pars totum inſertionis ambitum occupat fibrasque parallelas producit *d*); alia, licet minor omnino, ſedibus inſertionis conſumtis, ſub priores ſe recipit, fibrasque efficit radiatas *e*) ſimiles quodammodo fibris radiatis ſuperioribus ſtrati externi. In hoc externo ſtrato ob ipſam illam ſingularem fibrarum diſpoſitionem duo faſciculi, quos proprio ideo no-

a) Tab. VI. y. 13. Tab. V. 32. 52.
b) Tab. IV. D. H. E.
c) Tab. IV. 77. 78. 82. 96. 100.
d) Tab. IX. l. p. 11. Tab. VII. H. G. E. 36. 39.
e) Tab. VII. 37. 41. 42. 43. 47. Tab. IX. 16. 17. 18. 19.

nomine *procurrentium* notaui, memorabiles ſunt, *maior*, quo fibrae parallelae ordinis primi et ſecundi, quae ſingulae propria ſua inſertionis puncta inueniunt, a fibris radiatis, quae ad priores ſe applicant, vel ſub eas ſe recipiunt, diſtinguuntur *a*), et *minor*, qui vltimas demum fibras, ad lineam inſertionis peruenientes eiusque extremam partem occupantes continet *b*); vltra quas quae porro a crena oriuntur, proprie radiatae ſuperiores dictae, omnes ſub eum fasciculum ſe recipiunt. Horum etiam procurrentium fasciculorum, qui quaſi directores caeterarum fibrarum ſunt, quibusque tota harum diſpoſitio innititur, analogi quid in ſtrato ſecundo inuenitur *c*). Vt manifeſto ſimilem in his ſtratis duobus diſpoſitionem fibrarum eſſe videas, eo magis notabilem, quo prorſus ſingulare id eſt, in quo ſimilitudo conſiſtit.

In quonam ab eo differat. Diſpoſitionis propriae ſtrati ſecundi fundamentum.

Iam ipſa fibrarum ſtrati ſecundi diſpoſitio et accuratius definiri, et qua ratione ab externarum fibrarum diſpoſitione differat, paucis oſtendi facile poterit. Tota ſedes inſertionis, quae a principio ſtriae ad centrum commune focorum vsque ſe extendebat, ſtriamque totam et fasciculum terminalem inferiorem complectebatur *d*) in ſtrato externo, ita retrorſum, verſus baſin cordis, promota eſt in ſtrato ſecundo, vt terminus eius, qui ad centrum focorum conſtitutus erat, ad finem ſtriae nunc poſitus ſit *e*), ſiue ad principium fasciculi terminalis inferio-

a) Tab. IV. 73. 73. 74. 105. Tab. VI. 24. 76.
b) Tab. IV. 84. 88. 101.
c) Tab. VII. e. E. 28. Tab. IX. x. z. 3. Tab. VII. 38. 39. 40. Tab. IX. 11. 15.
d) Tab. VI. y. 4. 80.
e) Tab. IX. 18.

ſerioris, qui ab ipſa extremitate ſtriae oritur; poſterius ad baſin cordis, quantum retrorſum inſertionis ſedes promota, de longitudine ei decedat; fibris omnibus arctius intra hos limites anguſtiores compactis, vel potius minori diſpendio, quemadmodum inferius patebit, ad breuiorem hanc inſertionis ſedem applicatis. Sic quantum finis ſtriae *a*) a centro focorum *b*) in ſtrato externo diſtat, quod quartam quaſi partem totius longitudinis ſedis inſertionis efficit; tanto et breuior facta ſedes inſertionis in ſtrato ſecundo, et retrorſum verſus baſin promota. Tota ſedes originis fibrarum, quanta et qualis fuit in ſtrato externo, fila cartilaginea ſiniſtra complectens ambo, et partem baſis aortae et totam crenam, immota et immutata reſtat *c*). Sedes tamen inſertionis praeterquam quod verſus baſin tota promouetur, aliam quoque, leuioris quidem momenti, mutationem patitur. Qui procurrentes fasciculi in ſtrato externo fibras omnes, tertii ordinis longus *d*), breuis quarti *e*), ea ratione colligebant, vt in vnicum quaſi punctum ad finem ſedis inſertionis *f*) ambo fasciculi vna cum fibris ſuis collectis concurrerent *g*), hi nec omnes ſibi adſcriptas fibras exacte colligunt in ſtrato ſecundo, nec vnam in ſedem ambo concurrunt, ſed ſolutiores paulisper et a ſe mutuo extremitatibus ſuis diſcedunt ipſi *h*) et aliquas fibrarum ſuarum liberas et ſparſas ad ſedem inſertionis communem excurrere ſinunt. Minorem quidem et paruam omnino partem ſuarum breuis fasciculus procurrens permit-

a) Tab. VI. 12.
b) Tab. VI. 80.
c) Tab. IX. l. p. Tab. VII. H. E. G. F.
d) Tab. IV. 73. 74. 75. 77. 78. 79. 81. 82.
e) Tab. IV. 84. 87. 88. 89. 90. 92. 94. 97. 98.
f) Tab. IV. T.
g) Tab. IV. 101. 102.
h) Tab. IX. x. z. 6. et 11. 16. 17.

mittit *a*), longus maiorem *b*). Maximam partem vterque recipit. Caeterum omnino immutata inſertionis ſedes verſus baſin promota eſt.

Progreſſus directionis fibrarum ſtrati ſecundi.

Ex hoc diſpoſitionis fundamento, et quantum directio fibrarum in ſtrato ſecundo, et qua ratione ſit mutata, intelligitur. Fibris ſingulis ab iisdem crenae vel filorum cartilagineorum punctis ſubortis, ad ſedes nunc multo poſteriores, baſiue cordis propiores tendentibus, neceſſe eſt, vt multo nunc ductui transuerſo propiores progrediantur. Atque cum obliquitas earum ea iam fuerit in ſtrato externo, vt variis in ſedibus ad angulos ſemirectos *c*), in aliis ſemirecto maiores *d*), omnino transuerſim in aliis *e*), ex crena prodirent; cum quarta fere longitudinis ſuae parte verſus baſin tota ſedes inſertionis ſit retracta; neceſſe eſſe patet, vt vel parum vel nihil in ſedibus aliis a ductu transuerſo directio fibrarum in ſtrato ſecundo diſtet *f*), in aliis eum ductum omnino iam ſuperet, ab apice fibris verſus baſin quodammodo oblique adſcendentibus *g*). Is ergo progreſſus eſt directionis fibrarum in ſtrato ſecundo verſus eam metam, quam ſucceſſiue per varia ſtrata demum fibrae ventriculi ſiniſtri aſſequuntur; vt per ſemitam ſcilicet eandem eo denique in vltimis ſtratis redeant, vnde in primis erant productae.

Qua

a) Tab. IX. 18.
b) Tab. IX. 6. 10. 12.
c) Tab. IV. 73. 75. 79.
d) Tab. IV. 89. 90. 92.
e) Tab. IV. 94. 95. 97. 98.
f) Tab. VII. 36. 37. 38.
g) Tab. VII. 41. 42. 44.

Qua ratione progreſſus iſte fiat.

Hic directionis fibrarum progreſſus ea ratione in ſtrato ſecundo efficitur, vt, quem ſingulae fibrae, ſingulaeue fibrarum faſciae aut faſciculi inter ſe mutuo habuerint ſitum in ſtrato externo, eandem et in ſecundo fere retineant; omnes ſimul ſumtae reſpectu ventriculi aliam omnino nanciſcantur directionem. Vti enim tota inſertionis ſedes vltro verſus baſin cordis promota, tota origine immutata permanente; quam vna fibra directionis reſpectu mutationem patitur, eandem et caeterae ſimul omnes patiuntur; nec poſſunt ergo hac directionis mutatione ſitum inter ſe ipſas mutare, et quae parallelae in ſtrato externo, quae conuergentes, aut diuergentes, fuêre, eas et ſimili erga ſe inuicem modo in ſecundo ſtrato diſpoſitas eſſe oportet. Hoc ſolo ab ordine eo diſcrepant fibrae, quod non in vnam ſedem, qui analogi in hoc ſtrato ſunt faſciculi procurrentibus, concurrant, ſed a ſe mutuo diſcedant; et porro, quod non omnes, ſed maximam partem tantum ſuarum fibrarum colligant, nonnullas dimittant. Eo enim et inter ſe ipſas hae fibrae ſitum quodammodo mutant.

Alia fibrarum ſtrati ſecundi ab externis, reſpectu diſpoſitionis, differentia.

Deinde vero et alia inſignis differentia inter fibras binorum ſtratorum ex hoc diſpoſitionis fundamento enaſcitur. Vti dimidia pars fibrarum in ſtrato externo omnem inſertionis ſedem, ſtriam funiculumque terminalem inferiorem ad centrum focorum vsque, occupauerat; *a*) altera pars dimidia ad ſolam extremitatem eius ſedis, ad centrum focorum ſe conferebat partim *b*), partim ſub fibras, ſibi praecedentes, ſe recipiebat;

a)

(*a*) Tab. VI. v. 13. 22. 75.

(*b*) Tab. VI. 78 Tab. IV. 101.

a) cum extremitas illa in ipſo margine ventriculi conſtituta eſſet; *b*) nulla ex his poſterioribus fibris marginem tranſire in inferioremque ventriculi ſuperficiem peruenire potuit. *c*). Iam primae enim earum, a principio crenae ſubortae, procurrentem faſciculum longum efficientes, dum centrum focorum peterent, non poterant niſi iuxta marginem partim in ſuperiori ſuperficie, partim in margine ipſo, verſus illud decurrere *d*). His ergo caeteris iam fibris via ad inferiorem ſuperficiem praecluſa *e*); vt vel ſe applicare ad illas vel iuxta easdem ad idem decurrere centrum focorum neceſſe fuerit. In ſtrato contra ſecundo, tota inſertionis ſede retrorſum promota, extremitas eius ad ductum ſedis huius ipſius per marginem faſciculi terminalis inferioris *f*) in ſtriam vsque translata eſt *g*). Quae vltimae omnium ergo, ſede inſertionis occupata, extremitatem eius *h*) fibrae petunt *i*), eae vt circa marginem flectantur totamque inferiorem ventriculi ſuperficiem percurrant neceſſe eſt. Proinde nec caeteras iſtae radiatas fibras *k*) vllo modo impediunt, quominus ad extremitatem ſedis inſertionis, vel ad inferiorem ſuperficiem, pervenire poſſint.

Ortus

a) Tab. IV. 77. 78. 82. 97. 98.
b) Tab. IV. 104. 101.
c) Tab. IV. 73. 98.
d) Tab. IV. 73. 73. 73. 74. 74. 105.
e) Tab. IV. 77. 78. 82. 88. 96. 97. 98.
f) Tab. IX. 24. f.
g) Tab. IX. 18.
h) Tab IX. f.
i) Tab. IX. 19. 18.
k) Tab. IX. 19. 24.

Ortus fibrarum ſtrati ſecundi in vniuerſum.

Pariter ergo atque in ſtrato externo duas fibrae totius circumferentiae ventriculi tertias partes pro ortu ſumunt, vnam tertiam, aut ne integram tertiam quidem, inſertioni relinquunt. Oriuntur a toto filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro *a*), ab interſtitio inter bina fila ſiniſtra *b*), a filo ſiniſtro anteriori *c*). Sed paucae quidem fibrae ſunt, quae ab hoc anteriori filo oriuntur. Ita enim transuerſim in hac ſede procedunt, vt vix non parallelae filo intactum hoc relinquant. Deinde porro a parte ſiniſtra baſis aortae, quam inter exteriores fibras funes duo magni *d*) occupauerant, copioſae originem ducunt *e*). Oriuntur porro haud rariores ab ea regione partis baſilaris, quam retro conum arterioſum columna triangularis in ſtrato externo occupauerat *f*). Poſthaec a tota crena oriuntur, a parte eius media *g*), quam pontis regionem diximus, quae ipſa poſterius crenam in hoc corde, cui conus arterioſus ſolutus eſt, terminat *h*), et a parte tota radiata ad finem crenae vsque *i*). Denique ab ipſis, qui ſtratum externum terminabant, faſciculis terminalibus, in ſpecie quidem ab anteriori *k*) et medio *l*), vltimae ſtrati ſecundi fibrae originem ſuam ſingulari modo, quem inferius explicabo, ducunt; vt aliqua ſui

---

a) Tab. IX. l. m. n.
b) Tab. IX. n. p.
c) Tab. VII. H. G.
d) Tab. V. 43. 48.
e) Tab. VII. G. B. 26. 27.
f) Tab. V. 52. Tab. VII. B. E. 26. 30.
g) Tab. VII. E. 38.
h) Tab. VII. E.
i) Tab VII. 41. 42. 44. 47.
k) Tab. VII 47. 45. 48.
l) Tab. VII. 50. 48. I.

ſui parte, imprimis radicibus ſuis *a*) ad ſtratum externum faſciculi iſti, *b*) caeteris expanſionibus ſuis *c*) ad ſtratum ſecundum pertineant, imo ad tertium quoque, quemadmodum in ſequentibus explicabitur, nonnullis propaginibus ſuis ſe extendant.

Progreſſus in vniuerſum et directio fibrarum.

Vario, imo et maxime diuerſo, ductu ex ſedibus illis ſubortae fibrae verſus marginem ventriculi in ſuperiori ſuperficie, verſus ſtriam in inferiori, progrediuntur. Neque eaedem fibrae in ſuperficie vtraque eandem continuant directionem. Et in vtraque ſuperficie, quae oblique deſcendant, quae transverſim progrediantur, quae manifeſto adſcendant oblique, fibrae occurrunt. Maximam tamen partem, ſi ſolas, quae ex radiata regione oriuntur, excipias, ad oblique deſcendentem potius, quam ad transuerſum, ductum referri poſſe videntur. Id vero certiſſimum eſt, vbique ductu has fibras ferri, analogo ductui fibrarum externarum, quemadmodum analoga his fibris ratione diſpoſitas eſſe vidimus. Transuerſae fere et parallelae filo cartilagineo anteriori ſiniſtro in ſuperiori ſuperficie poſterius ad baſin, quam ſedem funes in ſtrato externo occupauerant, apparent *d*). Hae tamen, vti nonnullae earum ab ipſo hoc filo oriuntur, pro fibris oblique deſcendentibus habendae eſſe videntur, quamuis vix differant a ductu transverſo. Eaedem fibrae, vbi, circa marginem flexae, inferiorem ingrediuntur ſuperficiem *e*), manifeſto oblique deſcendunt. Oblique pariter deſcendunt, quae mediam partem in ſuperiori

a) Tab. VII. 47. 50.
b) Tab. IV. 99. 103.
c) Tab. VII. 45. 48. I.
d) Tab. VII. H. G. E. 32.
e) Tab. IX. p. x. 4.

ſuperficie occupant, ex pontis regione productae, *a*) quae ſedes fibrarum ordinis tertii in ſtrato externo fuerat. Hac circa marginem flexae in inferiori ſuperficie recta transuerſim ad ſtriam excurrunt *b*). Denique quae in vtraque ſuperficie circa apicem verſantur, manifeſto oblique aſcendunt *c*). Vt oblique adſcendentes ergo, deſcendentes oblique, et transuerſas, in vtraque ſuperficie habeas; vt ſaepe, quae in ſuperiori ſuperficie transuerſae, aut fere transuerſae, fuerint, oblique deſcendant in inferiori, et transuerſim contra progrediantur, quae oblique deſcenderant in ſuperiori ſuperficie.

Progreſſui et directioni fibrarum in ſtrato externo analogus.

Quamuis autem absque vllo ordine primo aſpectu, aut lege, progredi hae fibrae et ductae eſſe videantur; non minus tamen ideo analogus et conformis eſt ductus earum ductui fibrarum externarum, quam diſpoſitio vtrarumque ſibi ſimilis inuicem fuit; vt quantum in vna, tantum et in quacunque altera ſede vel transuerſo vel oblique adſcendenti ductui in ſtrato ſecundo fibrae ſint propiores quam in externo. Quae partem ventriculi poſteriorem ad baſin in ſuperficie ſuperiori occupant fibrae *d*), adeo parum deſcendunt, vt potius transverſae eſſe videantur. Deinde fibrae eaedem inferiorem ingreſſae ſuperficiem *e*), inſigniter oblique deſcendunt. Sed pari ratione funes, qui locum earum in ſtrato externo tenent, ita oblique deſcendunt in ſuperiori ſuperficie, vt transuerſis propiores ſint *f*). Vbi ad marginem perueniunt, ſuperficiemque ingre-

a) Tab. VII. e. 34. 38. 39.
b) Tab. IX. 4. 11.
c) Tab. VII. 41. 42. 43. 44. 45. 48. Tab. IX. 14. 19. 16. 17. 19. 24. 22.
d) Tab. VII. G. E. H. 28.
e) Tab. IX. p. x.
f) Tab. IV. 60. 64. 52. 54. 47.

ingrediuntur inferiorem, parallelae fere margini parum a longitudinalibus differunt *a*). Non magis ergo in ſuperiori ſuperficie hae fibrae a fibris externis, quibus teguntur, quam in inferiori directionis reſpectu differunt, et eadem inter vtrarumque directionem in vtraque ſuperficie proportio eſt. Quae mediam partem ventriculi in ſuperiori ſuperficie occupant ſtrati ſecundi fibrae *b*), magis quam illae ad baſin oblique deſcendunt, vt tamen transuerſo ductui multo, quam longitudinali ſint propiores *c*); ſed pariter et fibrae externae magis in hac ſede deſcendunt, vt longitudinali potius quam transuerſo ductui accedant *d*). Denique quae apicis regionem occupant in ſuperiori ſuperficie fibrae externae, transuerſim iam ipſae progrediuntur *e*). Neceſſe igitur eſt, vt fibrae ſtrati ſecundi, quo proportione eadem ab iis differant, oblique adſcendant *f*). Sic vbique eadem proportione fibrae ſtrati ſecundi a fibris, quibus teguntur, externis directionis reſpectu differunt, vbique aequali gradu ex oblique deſendente ad transuerſum, ex transuerſo ad oblique adſcendentem ductum progrediuntur. Quae partem mediam ventriculi in inferiori occupant ſuperficie fibrae ſtrati ſecundi *g*) ortae a crena *h*), aliae fibrae ſunt, quam quae in ſtrato externo eandem ſedem tegunt *i*), quae partim a filo cartilagineo ſiniſtro anteriori, partim a poſteriori oriuntur. Analogae illis fibrae, ab eadem crenae parte ortae,

 in

a) Tab. IV. 62. 73 74. Tab. VI. 47. 57. 56. 62. 49. 52. 55. 76 69.
b) Tab. VII. E. 38. 34. 39.
c) Tab. VII. 32. 33. 38. 39.
d) Tab. IV. 75. 78. 79. 82.
e) Tab. IV. 94. 95. 97. 98.
f) Tab. VII. 41. 42. 43 47. 49. 50.
g) Tab. IX. 4. 6. 11. 15.
h) Tab. VII. f. 32. 38. 40.
i) Tab. VI. 16. 20. 39 15.

in ſtrato externo *a*), quemadmodum in ſuperioribus explicatum eſt, ad ſuperficiem inferiorem non perueniunt. Sed quae partem poſteriorem ad baſin in inferiori ſuperficie occupant ſtrati ſecundi fibrae *b*), eadem qua reliquae omnes huius ſtrati a reſpondentibus ſibi externis proportione ab illis fibris directionis reſpectu differunt, quae in ſtrato externo hanc ſedem tegunt *c*).

Inſertio in vniuerſum.

Sic vario igitur, at maximam partem oblique deſcendente, transuerſali propinquo, ſi fibras regionis radiatae excipias, vbique externis analogo, ductu fibrae ſtrati ſecundi a ſedibus ſuae originis verſus marginem primo, deinde a margine verſus ſtriam progrediuntur. Inſeruntur in ſtriam totam et in capitulum quoque ſeu principium funiculi terminalis inferioris. Quamuis notabili, et quarta fere, parte haec ſedes inſertionis minor ſit, quam illa in ſtrato externo, cui ad ſtriam totus quoque faſciculus terminalis inferior accedebat; totidem tamen, immo plures, facili negotio ab eodem originis ambitu ortae fibrae in eam inſeruntur. Fibrae externae, imprimis prior earum pars, a filis cartilagineis ſiniſtris ſuborta, et quae ipſa inſertionis ſedem totam occupauerat, ita oblique deſcendebant, vt longitudinali ductui multo quam transverſali eſſent propiores *d*). Et quae in ſtriam ſe inſerebant, a filo ortae cartilagineo poſteriori, adeo oblique et angulis adeo acutis eam ingrediebantur, vt ſingulae fibrae, extremitatibus inſertae diſperſis, duplo fere maiorem eius partem occuparent, quam ſi recta in eam, aut ductui transuerſo propiores,

a) Tab. IV. 73. 85.
b) Tab. IX. p. q. l. m.
c) Tab. VI. 9. 49. 39.
d) Tab. VI. 62. 37.

res, anguliſque maioribus ingreſſae eſſent *a*). In ſtrato contra ſecundo et quae transuerſali feruntur ductu, et quae oblique deſcendunt, et quae paucae ex adſcendentibus oblique fibris ad ſtriam perueniunt, ubi propius ad eam accedunt, ita continuo flectuntur, vt recta tandem omnino, niſi omnes, maxima tamen pars earum, in eam incurrant. Non mirum eſt ergo, ſi totidem, immo ſi plures, fibrae in breuiorem hanc ſedem inſertionis ſe inſinuant, quam a longiore ſede in ſtrato externo excipiebantur. Nam plures omnino fibrae in ſtrato ſecundo in ſtriam inſeruntur, quam in ſtriam vna et in faſciculum terminalem inferiorem in ſtrato externo. Quantum enim ſolutior faſciculus procurrens breuis fibrarum ad ſedem communem tranſire ſinit, et quantum longus earum permittit, qui bini faſciculi in ſtrato externo reliquas poſt ſe omnes, ne una quidem permiſſa, fibras exceperant, tanto in ſtrato ſecundo plures fibrae ad ſtriam perueniunt, in eamque inſeruntur.

Decuſſatio fibrarum ſtrati ſecundi et externi.

Vti notabili gradu directio fibrarum in ſtrato ſecundo progreſſa, vt quae longitudinali ductui propiores in ſtrato externo plurimis in ſedibus fuerant, transuerſo nunc proximae fere vbique exiſtant; cum analogo ductu caeteroquin vtriusque ſtrati fibrae ferantur; ad angulos etiam quaſi ſemirectos vbique fere ſecundi ſtrati fibras externae decuſſant. Quamuis enim in inferiori ſuperficie non iisdem fibris eaedem tegantur, quibus tegebantur in ſuperiori; atque de iis, quibus teguntur, haud conſtet, an ductu aeque analogo progrediantur; tamen ſi iconum ope vtriusque ſtrati fibras in ſingulis ſedibus comparaueris, parum inuenies abeſſe, quin ad angulum fere vbique ſemirectum fibrae ſe decuſſent.

Minor

a) Tab. VI. 30. 32. 35. 36. 39. 41.

Minor prope ſedem ortus, maior prope inſertionem.

Hoc ſolum notandum, quod et in aliis ſe mutuo tegentibus ſtratis fibrarum iam obſeruaui, et quod in vniuerſum, vbicunque diuerſa ſtrata fibrarum in ventriculis ab vna ſede oriuntur, valere videtur: in primo principio ſcilicet parum quidem diuerſorum ſtratorum fibras, et vix quidquam, inter ſe directione differre, deinde ſenſim flecti fibras ſtrati alterius, dum alterius fibrae ſuam continuant directionem; vel magis flecti, dum minus alterius fibrae flectuntur; vt quo magis fibrae vtriusque ſtrati contigui progrediuntur, eo magis et a ſe mutuo diſcedant, et directione inter ſe differant. Id ipſum in his ſtratis quoque ventriculi ſiniſtri, externo et ſecundo, obſeruatur. Sic fibrae a tota crena ad regionem radiatam vsque *a*) in primis principiis ſuis et proxime ad crenam parum vel nihil ductu ſuo obliquo differunt a fibris externis, ſedem eandem tegentibus *b*). Vbi hae fibrae mediam fere ſuperficiei ſuperioris partem nactae, ita iam ſenſim flexae apparent, vt parum a transuerſo ductu differant *c*), dum fibrae externae in ſedibus iisdem *d*), eundem obliquum ductum continuant. Denique ſuper marginem ventriculi fibrae illae ſtrati ſecundi eodem, transuerſali propinquo, ductu tranſeunt *e*), et penitus fere transuerſim in inferiori ſuperficie ad ſtriam vsque continuant *f*). Externae contra vbi ad marginem accedunt verſus apicem potius nunc demum flectuntur, et ad centrum foeorum concurrunt *g*), dum fibrae eaedem in ſtrato ſecundo, quae

a) Tab. VII. E. f. 36. 38.
b) Tab. IV. 66. 78. 79. 83.
c) Tab. VII. 30. 32. 35.
d) Tab. IV. 72. 73. 81.
e) Tab. VII. 30. 32. 33. 36.
f) Tab. IX. 4. 7. 11.
g) Tab. IV. 73. 77. 78. 74. 82. 74. 105.

quae in principiis parum vel nihil ab his differebant, mediam fere ſtriae partem ſua inſertione occupant *a*). Similiter cum fibris comparatum eſt, quae ex radiata regione oriuntur. Eae in ſtrato ſecundo proxime ad crenam, dum ab ea oriuntur, fere tranſuerſae ſunt *b*); in nonnullis ſedibus a lege hac aberrare paulisper videntur *c*). Mox vbi progrediuntur, ſurſum oblique ſe flectunt *d*). In ſtrato externo eaedem fibrae tranſverſim pariter ex crena prodeunt *e*); ſed recta tranſuerſim continuant primum, deinde verſus centrum focorum curuatae deſcendunt potius *f*), in idemque inſeruntur *g*); dum illae in ſtrato ſecundo circa marginem flexae valdopere verſus baſin in inferiori ſuperficie *h*), ſicut in ſuperiori *i*) adſcendunt et ſub fibras ordinis praecedentis ſe recipiunt. Neque aliter demum ſe res in fibris, ab aorta ortis, habet, et a filo cartilagineo anteriori. Quae ab aorta oriuntur in ſtrato ſecundo, eodem accurate ductu in primis initiis ſuis oblique deſcendunt *k*), quo funes magni *l*) ab eadem ſede orti, ferebantur; deinde ad tranſuerſum illae ſe flectunt *m*). Hi curuati a tranſuerſo recedunt magis, verſus longitudinalem potius declinant ductum

a) Tab. IX. 10. 12. 15.
b) Tab. VII. 44. 47. 50.
c) Tab. VII. 41. 42.
d) Tab. VII. 43. 49. 51.
e) Tab. IV. 92. 94. 95. 97. 98. 99.
f) Tab. IV. 94 96 93 100 87.
g) Tab. IV. 101.
h) Tab. IX. 16. 17.
i) Tab. VII. 42. 43.
k) Tab. VII. G. B.
l) Tab. IV. 60. 65.
m) Tab. VII. 26. 27.

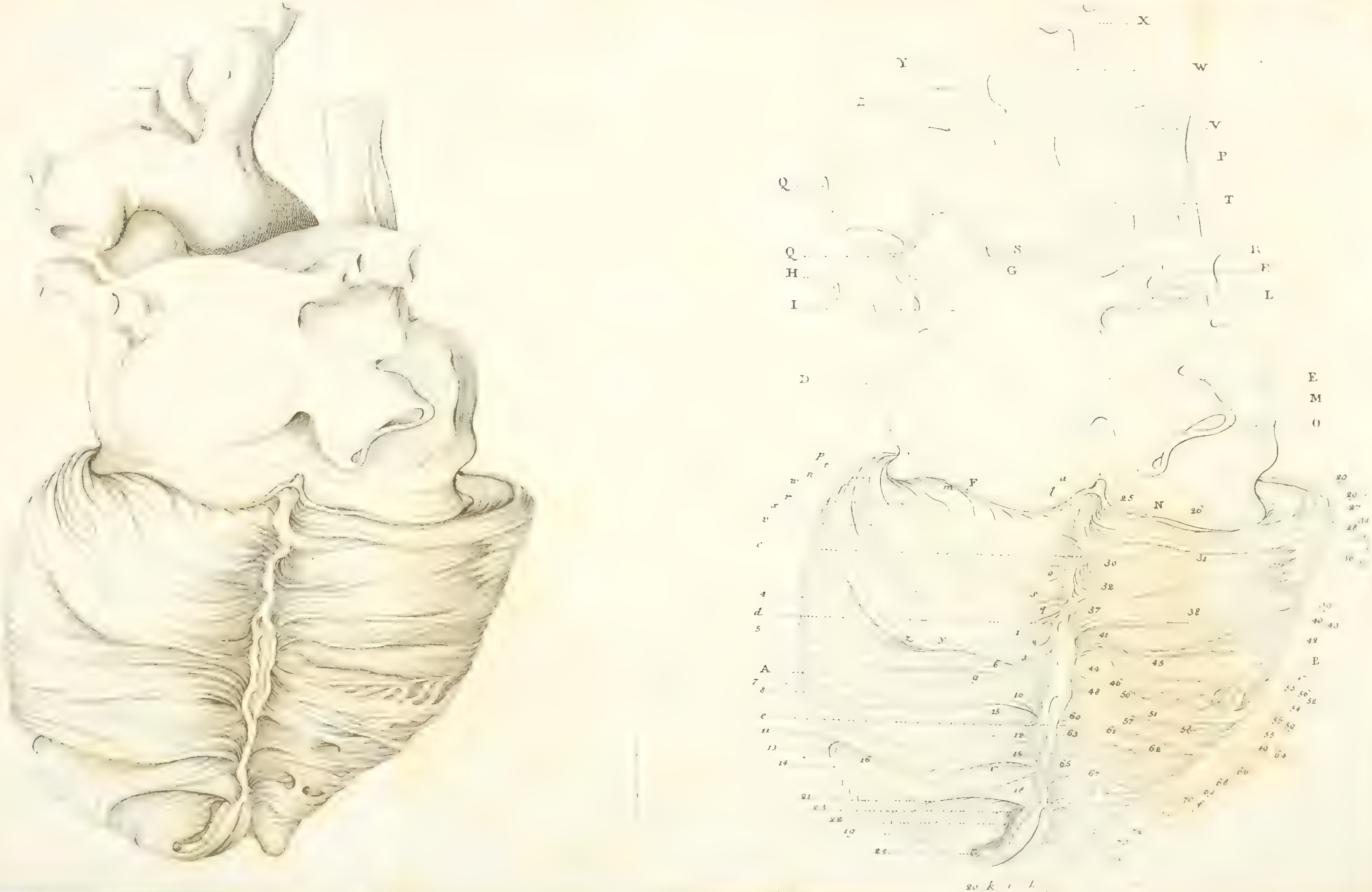
tum *a*). Ad inferiorem, vbi vtraeque fibrae peruenere, illae oblique deſcendunt *b*), ſed vix, atque ne vix quidem, ab ipſo quoque longitudinali ductu in ſtrato externo fibrae eaedem in ſede eadem *c*) differunt. Et denuo ad transuerſum ductum redeunt fibrae ſtrati ſecundi, inſertae in ſuperiorem partem ſtriae *d*), dum illae in ſtrato externo leniter quidem pariter, at parum, flexae in faſciculum tranſeunt terminalem inferiorem *e*), longe a ſuis ſtrati ſecundi fibris remotae.

Fibrarum ſtrati ſecundi concentratio.

In vniuerſum ſi reſpicis ad progreſſum et directionem fibrarum ſtrati ſecundi; ex maiori illae ambitu in partem circumferentiae longe minorem concurrunt, atque adeo concentrantur. Quae ſolita hactenus fibrarum diſpoſitio fere fuit. Externae ventriculi ſiniſtri ordine primo et ſecundo adeo obliquis angulis in ſtriam deſcendunt, eaque directione faſciculum verſus terminalem feruntur, vt, parum a ductu longitudinali diuerſae, a baſi cordis verſus apicem maxime pertingere videantur *f*). Ordinibus contra tertio et quarto ita magis magisque ad transuerſum ductum appropinquant, vt ad eundem ſingulae pariter fibrae redeant apicem ventriculi ſiniſtri *g*). Eadem erat quoque diſpoſitio fibrarum externarum ventriculi dextri. Hae a baſi arteriae pulmonalis, ab aorta, a filo cartilagineo dextro anteriori, oblique verſus crenam deſcendunt *h*), a

---

a) Tab. IV. 54. 61. 62. 70.
b) Tab. IX. p. x.
c) Tab VI. 13. 14. 15. 56. 51. 62.
d) Tab. IX. o. s. q.
e) Tab. VI. 53. 55. 68,
f) Tab. VI y. 13. 74. 72.
g) Tab. IV. 73. 73. 74. 90. 98. T.
h) Tab. IV. C. F. G. L. C. H.



De ordine fibrarum Cordis Tab. X


W
V
P
T
R
K
L
E
M
O
29
27
34
28
35
26
31
36
33
30
38
40
43
42
B
47
53
56
52
54
55
59
49
64
66
68
70

a filo poſteriori et a media ſtria tranuerſim *a*), a ſtriae parte propinqua apici adſcendendo *b*) in crenam eandem, vna cum illis concurrunt. Solum hactenus ſecundum ſtratum ventriculi dextri contraria diſpoſitione ex parte circumferentiae minori in ambitum longe maiorem fibris diuergentibus diſpergitur, ortum a ſtria, inſertum in filum cartilagineum dextrum anteterius, in baſin aortae arteriaeque pulmonalis et in crenam. Fibrae ergo ſtrati ſecundi ventriculi ſiniſtri ordinibus prioribus oblique in ſtriam deſcendunt *c*); Mediam ventriculi partem occupantes transuerſim in eandem tranſeunt *d*). Prope apicem adſcendunt oblique verſus ſtriam *e*). Quantum in ſtrato externo fibrae ordinum priorum longitudinali ductui propiores, *f*), quantum propiores transuerſo contra in ſtrato ſecundo *g*), tantum in illo minus *h*) in hoc magis *i*) fibrae ordinis quarti oblique adſcendunt; vt concentratio fibrarum in ſtrato vtroque tamen eadem fere efficiatur.

a) Tab. IV. I. N. A.
b) Tab. IV. O. P.
c) Tab IX. p x.
d) Tab. IX. 4. 11.
e) Tab. IX. 11, 24. 16. 17. 18.
f) Tab. VI. y. 13. 74.
g) Tab. IX. p. x. l. c. 3.
h) Tab. IV. 92. 95. 97. 98.
i) Tab. VII. 41. 42. 43. 44. 47. 49. 50. Tab. IX. 14. 19. 16. 17.

OBSERVATIONES ANATOMICO-PHYSIOLOGICAE CHYTILI CYGNEI L. OVARIA CONCERNENTES.

Auctore
I. T. KOELREVTER.

Conuent. exhib. d. 4 *Nouembr.* 1779.

Hoc anni tempore ouaria in conchis diuerſae magnitudinis, limoſas Rheni aquas incolentibus, inueniuntur. Deprehendi v. griſta in concha, 5″, 3‴ longa, 2″, 9‴ lata, et 1″, 6½‴ craſſa, vel etiam hac ipſa maioribus, vt et in aliis, 3″, 11‴, imo 3″, 2‴ tantum longis. Erant autem non in omnibus vnius eiusdemque maturitatis; dignoſcendus eſt maior eius gradus praecipue ouariorum craſſitie, ac inter alia ſigna etiam ex eo, quando ouula tantum laxius inter ſe cohaerent, nec difficulter a ſe inuicem diuelli patiantur. Ita v. g. res erat comparata in modo prius dicta concha, 3″, 11‴ longitudinis, videbamque, cum paruam moleculam, ex vno eius ouario adhuc penitus clauſo depromptam, ſub microſcopii Cuffiani ſimplicis No. 4, conſpexiſſem, embryones valuis partim in planum expanſis, partim ad dimidium apertis, eosdemque omnes viuere, iucundiſſimo ſane mihi ſpectaculo, valuas ſuas modo velociter contrahendo, modo aeque citato motu aperiendo,

endo, hancque commotionem eo ſaepius repetere, quo viuaciores ac valentiores adhuc eſſent paruuli. Nec viuere deſinebant, etiamſi mater e concha ſua iam dudum exempta fuerit. Ita eos d. 14 Nov. viuida ſeſe mouere vidi, licet mater iam pridie dilacerata hinc inde ac mortua propriae ſuae aquae, aëri liberiori in murrhino vaſe expoſita, immerſa iaceret. Succedente tempore tamen magis magisque langueſcebant ſenſim, attamen 20 Nou. cum aqua iam foetorem contraxiſſet, nonnullos tam ex dilacerato quam integre relicto altero ouario depromptos, aliquem adhuc motum edere comperi. In portione vero ouarii, per 24 horas in aqua recenti detenta, viuentium amplius nulli omnino. Ii, quibus valuas ipſorum horizontaliter expanſas habere contigit, haud facile eo vsque ſe contrahere valent, vt concham ſuam penitus claudere poſſint, licet id ipſum actu eueniat in iis, qui minus adhuc patentes habeant valuas. Omnes autem hae viuentes conchulae multorum, valde tenuium, pellucidorum ac ſibi inuicem implicatorum filorum ope inter ſe cohaerent, quibus granula vel globuli innumeri variae magnitudinis ac formae annexi ſunt. Hi absque dubio ad placentae ſubſtantiam pertinent, illa vero funiculorum vmbilicalium officio forſan funguntur.

In ouariis, a maturitate ſua adhuc multum remotis, conchulae ſub microſcopio adhuc omnes clauſae apparent; hoc autem non obſtante, animalculi incluſi ac per tenuem transparentis teſtulae ſubſtantiam pellucentis, motum vitalem ſubinde videre iam mihi licuit. Quid igitur in cauſa eſt, cur conchulae iuniores, quo proximiores plenariae maturitati, ovariis ſuis adhuc incluſae, iam iam eo vsque ſeſe aperiant, vt ſaepius, quod ſupra monui, in planum ſe expandant, cum tamen poſt partum, vt ſingulae ac ſolitariae conchae, iam in

 iuue-

iuuentute ſua maxima ex parte ſemper clauſae ſint, valuasque ſuas interdum modice tantum reſerare ſoleant? Qui fit, vt musculi, quorum vi valuae alias arctiſſime clauduntur, nunc in tantum obſequantur, cum tamen temporis ſucceſſu prius rumpantur, quam vt tam violentam ac plenariam conchae apertionem patiantur? Color eiusmodi ouarii integri e bruno-rubicundus, ſingulae autem conchulae ſub microſcopio ſpectatae pallide brunus, ſplendore quodam aureo admixto. Conchulae ſub hoc ſtatu adeo pellucidae ac tenuis ſubſtantiae ſunt, vt aliae, iis ſubſtratae, per eandem transluceant. Hoc tamen non obſtante, ſoliditate notabili iam iam gaudent; ſtrident enim dentibus contritae, ac digitis contrectatae ſabuli quaſi ſenſum imprimunt; ſat ſalſae inſuper guſtu et acres, ac limum redolentes. Notandum praeterea tanquam maxime ſingulare, quod embryonum plane alia ſit forma, quam adoleſcentium: Sunt enim aeque latae, quam longae, imo fere adhuc paulo latiores; ſingula valua triangulum quaſi repraeſentat, cuius vnum latus, cardinem reſpiciens, rectilineum, reliqua duo autem curvilinea, ſ. arcuata ſunt; isque huius trianguli angulus, cardini directe ex aduerſo ſitus, adeoque eo loco, vbi aliquando conchae margo medius ac exterior locum habiturus, acutius multo producitur, quam alii duo anguli, dextrorſum ac ſiniſtrorſum a cardine excurrentes.

Si moleculae eiusmodi conchularum vividiſſimarum tantillum ſacchari vel atramenti ſcriptorii admiſcueris, valuis illico clauſis, in momento fere moriuntur. Spiritus vini easdem aeque cito enecat.

Simili molecula fili ferrei apice excepta, et, ad plenariam omnis humiditatis euaporationem vsque, candelae ardenti admota, conchulae, conſeruata propria ipſarum forma, pelluciditatem amittunt, albeſcunt, ac reapſe calcinantur.

De-

Deſuper notandum velim, me eodem tempore, quo conchae hae praegnantes fuere, earundem plures aeque diuerſae magnitudinis offendiſſe, in quibus conceptionis ovulorumque ne veſtigium quidem videre mihi licuerit. Anno 1774. ſub finem Maii mytilorum horum maximorum nonnullos pariter infoecundos, pallii vero, ſiue branchiarum exteriorum duplicaturam aquae copia diſtentam reperi.

Corollarii loco addam, cum ouiductus, etiam in ouariis, maturitate maxime prouectis, ne veſtigium quidem vnquam deprehendere potuerim, conchas has, ſemel praegnantes, ſiue iuniores, ſiue adultiores, partus ſuos edere non poſſe, quin, ad exitum iis parandum, branchiae exteriores, tanquam partes ad vitam conſeruandam ſummopere neceſſariae, disruptae penitus deſtruantur, ipſa haec animalia pariendo moriantur; eandem quoque fati neceſſitatem ſepias ac Polypos marinos experiri, licet ouarium eorum non pulmonibus, ſed abdomine, ac proprio folliculo concluſum ſit, Ariſtoteles auctor eſt, ipſaque ratio, a ſtructura horum Mollufcorum petita, poſtulat.

DE

DE SCHOERLO.

Auctore

BASILIO SEWERGIN.

Conuent. exhib. die 21 *Ianuar.* 1790.

§. 1.

Notiones praemiſſae.

De Natura lapidis, qui apud Germanos vulgo *Schörl* audit, inter Mineralogos ad noſtrum vsque tempus magnam miramque diſſenſionem, immo confuſionem obſeruari nemini obiter etiam in re mineralogica verſato ignotum eſſe puto. Alii nempe eum eſſe lapidem, alii compoſitionem metallicam ad naturam minerae accedentem autumant; alii porro, vt taceam diſſenſiones eorum, qui eum lapidem eſſe ſtatuunt, eum ferrum, alii plumbum, alii ſtannum et ſ. p. continere dicunt. Ex his tam variis, tamque diuerſis opinionibus id modo colligere licet; nos nequaquam cognoſcere poſſe, num omnes de vna eademque ſubſtantia locuti ſint.

Brevis inuentionis Hiſtoria.

§. 2. In huius lapidis Natura indaganda; niſi me omnia fallunt, hunc, qui ſequitur progreſſum fuiſſe, mihi videtur; et quidem in ſcriptoribus ſyſtematicis ab *Agricola* inde vsque ad *Beccherum* ne nomen quidem *Schoerl*, quo Germani ad hunc lapi-

lapidem deſignandum vtuntur, inuenio. Veroſimile mihi tamen videtur, *Agricolam* (in quinto libro de Natura foſſilium, Edit. Baſilienſis p. 609.) Schoerlum ſequentibus indicaſſe verbis: „ Quinetiam niger quidam lapis inuenitur, prorſus colore ſimi- „ lis illi, ex quo conflatur candidum plumbum: ſed adeo lae- „ vis, vt mox intelligas inanem eſſe, et in ſe habere nullum „ metallum. Hunc noſtri apellant lupi ſpumam. Idem *albus* „ *etiam, luteus et ſubuiridis inuenitur* “. Rationes autem, cur mihi ille loco citato Schoerlum intellexiſſe videtur, hae ſunt; quod 1.) *Spuma lupi* non tam ſit laeuis vt ille dicit *a*). 2.) Quod album etiam et luteum, ſubuiridemque inueniri dicat; cum vel numquam vel perraro Lupi Spuma viridis reperiatur. Quod 3.) porro facile illum tunc temporis vnam ſubſtantiam pro altera ſumere et inter ſe confundere potuiſſe, quemadmodum poſtea celeb. Lehmannus fecit, inde mihi veroſimile videatur, quoniam vtraque ſubſtantia nonnumquam ſub forma fibroſa occurrit.

Num duo iſta eiusdem clariſſ. Mineralogi Agricolae loca, vbi ille incertus et primo quidem Smaragdi differentias perſecutus dicit: „ Quod ad perſpicuitatem attinet, alia parte „ aciem oculorum recipiunt: quia prorſus non translucent, qua- „ les *Perſicos* eſſe tradit Plinius *b*) ſi in numero Smaragdorum „ habendi ſunt, vt ipſe eos habet. “ *c*) Altero vero de Beryllo

a) Grauitas ſpecifica Spumae lupi ad aquam, eſt vti 6000 : 1000, cryſtallorum autem minerae ſtanni plerumque vt 4952 : 1000. (Wallerii Syſtema Miner.)

b) Hiſt. Nat. L. XXXVII. C. XVIII. Democritum, ait, Perſicos in hoc genere poſuiſſe.

c) De Nat. Foſſ. L. VI.

ryllo differens ait: „ *Diadochos* autem, qui Beryllo ſimilis eſt „ *a*) ſi non eſt Beryllus, ſcriptores in quo differt ab ipſo non „ explicarunt “: *b*) huc etiam quodammodo ſpectent et Schoerli ſpecies *c*) denotent, in medio relinquo.

Tale de nomine Schoerli ſilentium vsque ad annum 1703. apud Germanos manſiſſe videtur, nam primum illud invenio in editione phyſicae ſubterraneae, quam Beccherus celeb. Ionſtoni aſſecla dicto anno imprimi curauit.

Aſt in Suecia iam *Bromelium* hoc nomine ad deſignanda quaedam grana metallica oblonga, multangularia, magnitudine facieque granatorum; ſed colore atque ſubſtantia cryſtallis ſtanni ſimilia vſum fuiſſe reperio. Ea autem Schoerli grana, quae apud exteros inueniuntur, vir ille prae ceteris laudat, quippequae quam maxime auro, argento et ſtanno abundare credidit. Communiter autem ea ferrum modo continere, nonnumquam etiam plane inania et ſulphure tantum volatili inquinata, conſtat. (Magni Bromel Miner. et Lith. Suecana a Micrander edita. Stockholm und Leipzig 1740.)

Linnaeus Schoerli non niſi in poſterioribus Syſtematis Naturae editionibus mentionem fecit, in prioribus enim et v. c. in ſecunda, cum ad ſtannum Granaten retulerit, de Schoerlo plane tacet, cui tamen poſtea ſuum locum aſſignauit. At in vltimis editionibus vir ille principio a ſe ſtabilito obediens, Boraci eum iunxit. Quod autem illum aliquid ſtanni et plumbi

---

a) Pallidior tamen. Anſelmi Boet de Boot Gemmarum et lapidum Hiſtoria. Hannoviae MDCIX. p. 280.

b) De Nat. foſſ. L. VI.

c) Vix monitu opus eſt, quod nulla hic ratio ſuperſtitioſae et ridiculae opinionis habetur, qua Diadochi facultas Daemones in lucem eliciendi indicatur Boet de Boot. l. c.

bi continere affirmet, id huic ſummo viro pro ratione temporum, nullo modo vitio verti poteſt, praeſertim cum ſterilem etiam ſolo ferro admixto eum inueniri dicat.

At Henckelius, ſummus in Germania Mineralogus, non modo nomine Schoerli vſus eſt, ſed etiam a Spuma lupi, quacum eum poſteri iterum confunderunt, diſtinguere coepit affirmans eum tenuioribus priſmatibus cryſtalliſatum inueniri.

In Roſſia Schoerlum, quoad nomen, iam 1742. notum fuiſſe ex libro, quem Cel. Lomonoſſow de re metallica ſcripſit, intelligo. Hic ſub nomine *Schirl* refert illum ad lapides metalliferos, nigrumque vt Spuma lupi eſſe et tenuioribus prismatibus ſtriatis cryſtalliſatum, ſtannique veſtigia praebentem inueniri adſerit.

Wallerius autem, vt praecipuos tantum nominem, dato ei iam ab initio nomine Baſaltae ad Cornea ſua eum referre conatus eſt, et exhibitis nonnullis ipſius notis, quo forma ipſius prismatica lateribus inordinatis, et modica igni reſiſtentia etc. pertinent. Sed in poſterum indicatis quam plurimis locis, vbi ille in Suecia reperitur non ſpernendam exteris vtilitatem attulit, et adeo in foſſilibus enumerandis aſſiduus fuit, vt omnes fere Schoerli ſpecies tunc temporis notae, alio tantum nomine inueſtitae, apud eum inueniuntur. Partes Schoerli conſtitutiuae ſecundum eum ſunt: terra Gypſea, aut quemadmodum hic idem adſeruit, terra huic ſimilis, terra aluminaris, intermixtis particulis ferreis.

E germanis *Cartheuſerum* Schoerlum ſub nomine *Smectites* complexum fuiſſe, data ab illo definitio eius oſtendit, dicit enim ipſum cryſtalliſatum eſſe, cryſtallis oblongis irregularibus. Rationem vero, cur Schoerli nomen, tunc temporis

iam notum omittat, et huic nomen Smectitis ſubſtituat, reddere non poſſum, quod eo magis mihi mirum videtur, quum nomen Schoerli primum apud Germanos extitiſſe videatur. Smectiten autem eiusdem temporibus aliud quoddam et quidem cretam Hiſpanicam ſignificaſſe certum eſt.

Non poſſum non mirari, cum Suevi iam Naturam Schoerli perſpectum haberent, in Germania ſerius quosdam extitiſſe Mineralogos, qui tam male cum iis congruebant. Nam quis non fatebitur falſa eſſe ea, quae pridem Cl. Iuſti de Schoerlo affirmauerat: Spumam nempe lupi, (vt ipſius verbis vtar.) vel Schoerlum eſſe mineram ferri, quae ferri Arſenicique particulas, ac terram non metallicam, Stanni aliquid, aurique paſſim portionem continet. Nonne potius haec adhaerebant tantum eius ſuperficiei?

At *Cronſtedt* vir clariſſimus, qui ſua aetate tam multa in natura foſſilium chemice perſcrutanda verſatus eſt, Schoerlum ſub nomine Baſaltae complexus, multas eiusdem ſpecies et varietates adnotauit, multasque vir ille ſummus proprietates eius eruitas adnotauit. Quod autem particulas eum conſtituentes attinet, paucas affirmat, ſcitiſſime hoc modo diſſerens: Nolo negare Schoerlum poſſe reperiri, qui praeter ferrum, ſtanni et plumbi aliquid contineat, ſed certus de hac re non ſum, quamquam audio e Schoerlo Rödbeckswienſe ad Umeo plumbum extractum fuiſſe, et veroſimile mihi quoque videtur Schoerlum in Anglicis venis ſtanniferis Stannum continere. (In germanica eius Mineralogiae Editione Werneriana. Lipſiae 1760. Pars I. pag. 173.).

In Germania porro Cel. Lehmannus, Vogelius et Baumer Schoerlum et Spumam lupi pro vno eodemque corpore habent. Primus refert eum ad mineras ferri, vindicans ei prae-

praeter ferrum ſaepe ſtannum, terram non metallicam, vel etiam cum Arſenico mixtam. Quam autem varia ille inter ſe confundit corpora, ex eo, cum, fortaſſe, dubius ancepsque dicat, ſpumam lupi, Schoerlum, Magneſiam nigram et ferrum micaceum non valde inter ſe diſcrepare, cuique patebit. Vogelius caeterum cum eo conſentiens, eam modo ſpeciem Spumae lupi, Schoerlum appellandam eſſe contendit, quae prismatica eſt, lateribus inordinatis. Sed Baumer vlterius progreſſus, et Spumae lupi Schoerlum ſimillimum quidem eſſe dicit, laeuiorem tamen et ponderoſiorem, nec ferrugineum ſub raſura oſtendentem colorem, ſaepiusque prae illis multangularem et teſſelatum. Hinc patet illum diſcrimen inter crystalla Stanni et Schoerli iam ſatis intellexiſſe.

Venio nunc ad cel. Sage, qui in libro 1772. Pariſiis ſub Titulo *Elemens de Mineralogie docimaſtique* edito, Schoerlum ſub vno eodemque nomine generico cum Baſalte illo, trabes illas, vt Agricolae verbis vtar, nonnumquam conſtituente, intelligi voluit et nobis quatuordecim huius generis ſpecies recenſet, (quamquam tres ad columnarem illum pertinent;) et multas Schoerli cryſtalliſationes et quidem accuratiſſime deſcripſit. Huic poſtea de l'Ile, vir ſagax atque aſſiduus, in nominis atque ſpecierum definitione, additis nouis quibusdam ſecutus eſt. Et hactenus bene. Sed quid de illa eius ſententia, qua prorſus ab omnibus Naturae Scrutatoribus abnuit dicendum ſit, neſcio. Primo, ſcilicet, *calcem* ex acido phoſphoreo et terra abſorbente; tunc *Quarzum* ex acido vitrioli et Alcali fixo, et demum *Baſalten* ex acido phoſphoreo calcis et Alcali fixa Quarzi conſtare perhibet atque affirmat. Quoniam ille nos in praefatione monet, vt de inuentis ipſius nullo modo dubitemus, quippe ille nullis pepercit ſumptibus ad experimenta rite inſtituenda, neceſſe igitur eſt, vt

 ipſi

ipſi ex hac certe parte fidem adhibeamus. Interim euictum etiam eſt, experimenta ipſius cum experimentis ceterorum chemicorum non conuenire, et ſi aliquid in illis veri eſſet, vnus certe ex chemicorum cohorte idem affirmauerit. Sed omnia in illo negare ob auctoritatem eius non auſim.

Felicior, vt mihi videtur, in chymica lapidum perſcutatione erat cl. Gerhardus vir dignitate ac omni doctrina ornatus, qui certa experientia fretus Schoerlum praeter ferrum et terras, (quarum maximam partem particulis Amianthum conſtituentibus ſimillimam eſſe cenſet) nihil contineri affirmat. Cum granatis tamen quodammodo confundiſſe videtur. Sed ſi qui tunc irrepuerunt errores, certo omnes vir ille peritiſſimus emendauit, emendat, atque emendaturus eſt.

Accedo nunc ad celeb. Kirwannum, qui magnam nobis, vt in aliis ſtudiis, ſic et in re mineralogica lucem accendit, cuiusque foſſilium claſſificatio merito caeteris praefertur, quamuis in accuratiore eorum definitione multa mutanda vel etiam addenda ſint. Schoerlus huius eſt lapis ad claſſem ſiliceorum referendus, quem in duo genera diſtribuit; horum alterum, qui eſt quindecimus, complectitur Schoerlum totum quantum, alterum, qui eſt decimus ſextus, qui apud Germanos ſub nomine *Stangenſchörl* venit. Sed celeberrimus hic vir in ſpecierum atque varietatum Schoerli enarratione eſt compendioſus.

Bergmannus denique, qui multum cum Kirwanno conuenit, ſic Schoerlum definiuit: Quod ſit Argilla Silicea dimidium fere ponderis vel vltra efficiens et pauxillo calcis aeratae intime iuncta. (Sciagr. Regn. min. §. 120.). In variis porro diſſertationibus, accuratiſſimis experimentis et obſeruationibus Schoerli veram Naturam nobis oſtendit.

His

His tandem enarrationem ſententiarum de Natura Schoerli concludo; diſſenſiones enim recentiorum paſſim infra occurrent. Fateor tamen me non ſatis poſſe mirari, Mineralogos, cum ſubſtantia haec tam ſaepe occurrat, tamque notis diſtinctis praedita ſit, inter ſe diſſentire, et cogor ad credendum ſcriptores, qui de ea locuti ſunt, non ſemper ſatis accurate aſſidueque eam contemplaſſe, et potius ſententiis aliorum quam propriae experientiae fidem adhibuiſſe.

Tentamen de nomine definiendo.

§. 3. Nomina rem non mutare cuique notum eſt, vt autem accuratius cognoſcamus rem, nomina rite definita ſint opportet, i. e. ſint notiones, ſub quibus haud difficulter planeque rem ipſam nobis ſiſtere poſſimus. Quae quidem, quo minus rite definita ſunt, et quo latius patent, eo maiori dubio obnoxia ſunt, id quod tamen in Mineralogia non raro accidit, vt in noſtro ſubiecto. Linnaeus enim Schoerlum videre eſt ſub nomine *Boracis Baſaltidis*; Wallerius et a Sauſſure ſub nomine *Cornei* et *Baſaltae*; Cronſtedt, Sage, a Born, de *l'Isle* plerumque ſub nomine Baſaltae intelligunt; *Cartheuſer* eum *Smectiten* nominauit; *Demarets* nonnumquam *Gabbro*; Bergmann denique et plures alii recentiores Mineralogi, iam diu apud Germanos notum nomen Schoerli vſurparunt, quibus et ego ad tollendam in nomine confuſionem libenter aſſentio, quamquam ſunt quidam, qui ne hoc quidem nomen admittendum eſſe iudicant.

Variae huc relatae ſpecies.

§. 4. Sub nomine Schoerli intelliguntur plerumque tenuia, ſtellata vel alio quocunque modo diſpoſita, per longitudinem ſtriata cryſtalla, quales ſunt: *Schoerlus filamentoſus*, *faſciculatus*, *aceroſus* etc. porro ſchoerli *ſpathoſi*, *ſolidi*, *columnares*

nares vel etiam *polyedrici.* Huc quoque referuntur Schoerli *Electrici* vel *Turmalinus*; *Schoerlus violaceus nonnullorum* et ii, qui cryſtallo montanae, vt nonnulli aſſeverant, ſimiles ſunt. Quidam ad Schoerlum referunt etiam Beryllum, porro cryſtalla quaedam cubica colore et nitore Haematitae ſimilia. Alii denique *Macles* Gallorum, nonnullas vitrificationes volcanorum, verum Corneum lamelloſum, Granaten, Micam, Talcum, et Asbeſtum huc quoque pertinere cenſent.

De ſtabiliendis Schoerli notis.

§. 5. Quae vero lapidum genera huc pertinent et quae contra excludenda ſunt, ex proponendis nunc Schoerli notis et proprietatibus innoteſcet. Sed iam exemplo Schoerli docemur, quam parum nos ea criteria iuvant, quae ab externa facie, ſtructura etc. montium, vel locorum, quae foſſilia continent, ſumuntur, id quod praeſertim ex ſequentibus patebit.

Et primo, quod notas a forma montium deducendas attinet, hae ne locum quidem hic habere poſſunt, cum Schoerlus nuncquam montes integros conſtituat. Schoerlus itaque in montibus et altioribus et humilioribus, in planioribus vel praeruptis, conicis etc. occurrere poteſt.

2.) Structura montium in conſtituendis Schoerli criteriis parum confert, cum Schoerlus et in iis, qui ſtratis repleti ſunt, et in iis, in quibus venae permeant, in ſolidioribus aeque ac cauernoſis etc. reperiri poſſit.

3.) Neque ab interna indole loci, vbi Schoerlus reperitur notae apte deriuari poſſunt, nam Schoerlus in rimis aeque ac in venis etc. occurrit.

4.) Sed

4.) Sed fortaſſis videbitur illa notarum deriuatio accipienda, quae a Natura lapidis montem conſtituentis, ſumitur. Sic e. g. parum Schoerli occurrit in Schiſto Argillaceo, in Schiſto margaceo, in Marmore, Gypſo, cote arenario, et in vniuerſum cum Schoerlus e pluribus terris primitiuis conſtet, rarior in lapidibus ſimplicioris compoſitionis; ſaepius autem in montibus primitiuis, quam recentioribus, et in vniverſum ſaepius in lapidibus compoſitis, in Serpentino, Lapidibus Talcoſis etc. quam in aliis occurrit. Sed neque haec pro vero criterio ſumenda eſt, cum Schoerlus etiam a montibus ipſis, vel a loco natali remotus, et in fluminibus vel in campo cum arena permixtus occurrere poſſit.

Notae phyſicae.

§. 6. Notae eius phyſicae hae ſunt: 1.) Quod Magnete attrahatur et 2.) quod nonnulli proprie ſic dicti Schoerli polos vti Turmalinus oſtendant. Sed quoniam prior ex his proprietatibus omnibus fere lapidibus contingat, praeſertim ſi methodo Brückmanni vtemur; alterum vero vel dubium adhuc, vel non omnibus contingat, parum his notis vti poſſumus. Quomodo autem Schoerlus ſe ratione vis Electricae habeat, mihi ignotnm eſt.

Quod autem grauitatem ſpecificam eius attinet, haec, quamuis ſaepiſſime per phyſicam detegatur, ad notas Schoerli externas potius pertinere mihi videtur.

Notae externae.

§. 7. Sequentes notae externae, de quibus Mineralogi omnes conueniunt, Schoerlo adſcribendae mihi videntur.

Color plerumque ipſius eſt viridis vel virideſcens, ſaepe niger, vel e nigro rubeſcens, nonnumquam violacius (ra-

riſſime enim aliis coloribus imbuitur); forma cryſtallina perſaepe priſmatica, per longitudinem ſtriata occurrit; ſuperficies plus minus nitens; facies ſub fractura vitrea, ſemper plus minus ſemipellucida; finditur in fragmenta amorpha ſcindentia; durities eius inter lapidem calcareum et ſilicem media; particulae rigidae; grauitas denique ipſius ſpecifica eſt ad aquam, ſi hanc = 1000 ſumamus, vti 3000, vsque ad 3400 eſt.

Notae chemicae.

§. 8. Quod notas eius chemicas attinet, omnes mihi iterum in eo conuenire videntur: quod Schoerlus candeſcens diſſiliat, fortiori autem igne per ſe cum leui ſpumeſcentia emolliatur; cum alcali minerali ſub leui et fere momentanea efferveſcentia in puluerem dehiſcat; cum ſale microcoſmico aeque ac cum Borace in igne etiam efferueſcat. Per viam porro humidam cum acidis non efferueſcat (excepto tantum eo caſu, vbi ſuperficiei eius terra quaedam calcarea adhaeret) in illis tamen diſſoluatur et alcalinis praecipitatus maſſam efficiat coagulo ſimilem. Per Analyſin chemicam ſecundum Bergmann, Sauſſure et Klaproth plurimam partem terrae ſiliceae, minorem terrae aluminaris, minorem adhuc terrae calcareae, aliquid Magneſiae albae et ferri exhibeat. Bindheimii experimenta valde parum ab his differunt, aſt experimenta Vieglebii, cuius quidem Schoerlus iam ad aliud quoddam genus pertinere mihi videtur, multum ab his abhorrent.

Quomodo Schoerlus ab aliis lapidibus dignoſcendus ſit.

§. 9. His notis expoſitis facile nunc Schoerlus ab aliis ſimilibus lapidibus internoſcitur. Difficilius quidem a Mica et Corneo lamelloſo (Hornblende) tamen et horum accuratior contemplatio facile indicabit eos lapides a Schoerlo diuerſos eſſe,

eſſe, nam e. g. Mica viridis, quae ex omnibus huius generis Schoerlo ſimillima eſt, textura eſt molliori, ſtructura lamelloſa, lamellis elaſticis, nitore ad metallicam prope accedente; in igne denique per ſe vel difficillime vel omnino non funditur.

Maior eſt difficultas in Corneo lamelloſo diſtinguendo, quippequum 1.) parum adhuc dum de Natura illius definienda conſentiant, et 2.) cognationem quandam inter Schoerlum et illum exiſtere, certum ſit. At textura plerumque eſt ſpathoſa vel granularis; digitis conteritur; parum nitet, quaſi pinquedine obductus, perraro ſtriatus reperitur; odore ſub raſura terreo, exhibens puluerem cinereo virideſcentem vel glaucum. In vniuerſum particulis conſtat impalpalbilibus, neque tam rigidis vti Schoerlus. In igne per ſe ſecundum Cronſtedt indureſcit, et cum ſale microcosmico non efferueſcit. Per Analyſin chemicam ſecundum Viegleb ex maſſa duarum drachmarum 49 gr. terrae ſiliceae, 20 calcareae 21 Magneſiae albae, et 21 ferri praebet.

Fatendum tamen eſt in ſerie lapidum inde a Mica vsque ad Corneum lamelloſum, et a corneo lamelloſo vsque ad Schoerlum, et a Schoerlo vsque ad Zeolithen, Granaten et ſ. p. valde difficile eſſe definire terminos, vbi vnum deſinit, alterum vero locum excipit, et plerumque ſpecies mediae in cauſa ſunt omnis difficultatis et confuſionis in claſſificatione eorum ſyſtematica. Quae cum ita ſint, nonne rei adaptatiſſime conſulamus, ſi tam diu lapides ad hoc vel illud genus collocemus, donec notae alterius generis eminentiores vel vberiores factae fuerint? Qua quidem regula innixus non aliud potui iudicium de variis ad Schoerlum allatis lapidibus ferre, quam quod ſequitur.

Quod igitur Schoerlos Celeber. Ferberi aliorumque in Lauis occurrentes attinet, plures eorum dubii mihi videntur, et celeber. Ferber ipſe talia Cryſtalla ſaepe non plane Schoerlos, ſed Schoerlo ſimilia eſſe dicit. Huc pertinent Schoerli eius granuloſi, polyedrici et ſquamoſi. Certe Schoerli albi nonne ad Zeolithen potius referendi ſint? Quod tamen ego, cum ipſe eos numquam vidi, plane affirmare non audeo, quamvis pleroſque Schoerlos albos, praeſertim autem pellucidos, cryſtallo montanae ſimiles a *Sauſſurii* dubios mihi videri non negauerim. Nonnullos eorum in proprietatibus per chemiam detegendis a vero Schoerlo differre, experimenta Bergmanni et Claprothi euincunt.

Neque ea Cryſtalla granatica, quae formam crucis praebent et in Gallia *Macles* vocantur huc iure collocanda eſſe iudico, quia duritiem et colorem non Schoerli ſed granatorum habeant, nullis ſtriis ſint affecti, et plerumque vti nonnumquam Granates, Mica argentea obducta reperiantur.

Dubii etiam videntur mihi illi cubici de auroque participantes Schoerli, qui ſub hoc nomine in venis Catharinaepolitanis veniunt, et colore nitoreque Haemathitae ſimiles, ab interiore vero parte foraminoſi ſunt, duritie minore, facie ſub fractura non vitrea ſed terrea potius, neque vlla ſemipelluciditate praediti. Cum Schoerlis id iis tantum commune eſt, quod per longitudinem ſui ſtriati occurrant.

At Turmalinum vi tantum electrica a Schoerlo differre iudico et ad Schoerlos ſecundum idque principium referendum eſſe, ſecundum quod Celeber. Linnaeus *Raiam torpedinem* ad alias *Raias* retulit, nec ab iis ſecreuit.

Pari modo et Beryllum multas notas externas cum Schoerlo communes habere certum eſt, non poſſum tamen illam

lam eo referre, cum mihi proprietates illius per chemiam detegendae adhuc dum ignotae ſint, ipſe autem experimenta, omni auxilio deſtitutus, nullo modo inſtituere poſſim.

Secundum Celeber. Bergmannum denique et Smaragdum a Schoerlo non valde diuerſum eſſe, patet.

Specierum definitio.

§. 10. Haec igitur, quae ſequuntur, niſi me omnia fallunt, ad Schoerlum referendas eſſe iudico, in quarum claſſificatione Methodum celeb. Linnaei ſecutus nomina ſpecifica generico addenda curaui, quod quidem an bene tentarim, doctiorum iudicium eſto: et primo quidem.

S. ſolidus. Particulis vel lamellis arctiſſime iunctis, figura et ſitu indiſtinctis: grauitas illius ſpecifica eſt ad aquam vti 3,200 : 1,000. Color viridis vel nigreſcens: Reperitur praeter Sueciam, in Ehrenfriedersdorfio Saxoniae, Sileſiae in vico Querbach, in Uralia ad Sosnam teſte celeber. Pallas et ad littus Baikali et ſ. p. vide inter alios Cronſt. Miner. et Brünnich Miner. *verdeutſcht vom Herrn Prof. Georgi.*

S. ſpatoſus. Lamellis diſtinctis, figura plerumque rhombea. Grauitas illius ſpecifica ad aquam eſt vti 3,300, vel 3,400 : 1000. Varietates conſiſtunt in colore, qui plerumque virideſcens eſt. Reperitur in comitatu Glaz, prope Friedeburg ad Queis et Zottenberg: prope Dunam, Petshoram in Olonetz, Nertshinck, ad Neiuam in Uralia, Hagge in Norbergia, Lindbaſtmoren in Grüngrdet. Conſule praeter Cronſtedt et Brünnich, cel. Gerhard *Beytr. zur Chem. und Geſch. des Min.*

S. *fibroſus.* Particulis fibroſis, anguloſis vel rotundis. Grauitas illius ſpecifica ad aquam eſt vti 3,143 : 1000. (*Sauſſure Voyages aux Alpes*, §. 87.) Varietates in fibrarum ſitu: Hinc

Filamentoſus, ſi fibrae paralellae ſunt.

Faſciculatus, ſi forma faſciculi diſpoſita ſunt.

Stellatus, Kärrbo in Skinskatteberg.

Acerofus, ſi fibrarum decurſus ſine ordine eſt.

Color illis plerumque virideſcens vel nigreſcens. Reperitur in Ehrenfriedersdorfio ad Krebsberg, niger Iemtelandiae in Guſtavsberg, Uto etc.

S. *columnaris.* Cryſtallis priſmaticis maioribus diſtinctis plerumque apice piramidato: ad minimum angulos 3. ad ſummum 10. habet. Color eis viridis, vel niger, rariſſime alius. Quidam eorum articulati ſunt: Reperitur in Burghardsgrünerſeifen prope Schnebergium, in monte St. Gothardi, ad Murſincam, in iugo Altais, ad Petſhoram, in montibus Uralenſibus ad Catharinopolim, Epiphonzowa ad Schilkam; niger in villa Iohannis-Ceorgii, Eibenſtock, Freyberga, Siebenlehn, Penny etc.

S. *Granuloſus.* Particulis anguloſis vel rotundis ſegregatis punctorum, granarum vel globulorum inſtar nonnumquam lauis aliisque lapidibus inſidentibus; ſaepe colore elegantiſſimo. Napoli. Huc et arenam Schoerlaceam Ferberi refero. Conſule eius *Briefe aus Wälſchland* pag. 277. etc.

S. *tabulatus.* Priſma adeo planum, vt formam tabulatam rhomboidalem prae ſe ferat. Colore amethiſtino plus minus diluto.

Schör-

Schörlus violacius nonnullorum.
Tumerſtein Werneri? cinereus.
Reperitur in Delphinatu prope Allamont, Armentarie, Balmes d'Auris in Oiſon, in Pyraeneis Gallicis prope Barreges, prope Thume Saxoniae et ſ. p.

S. Electricus. Calefactus cineres aliaque leuiora corpora attrahens et repellens. Grauitas ſpecifica ad aquam eſt vti 2,952 - 3,294 : 1000. Varietates in colore et duritiae gradu.

Turmalinus Zeilonicus aliique, nam regula in §. 9. expoſita innixus alium ab alio ſecernere non potui, neque vllo iure id fieri poſſe iudicaui, cum Turmalinus Zeilonicus, non niſi gradu duritiae ab aliis diuerſus ſit: Reperitur in Zeylonia, Braſilia, inſulis ferroënſibus, in Zillerthal, et Gryphiberga Comitatus tyrolenſis, Greiner in Salisburgo, in Ehrenfriedersdorfio prope Freybergum, ſecundum Cronſtedt etiam in Oſtrobothia, Umeo, Sahlberg, Norberg, Sâwick, Glanzhammer in Nericia, et prope Allamont in Delphinatu.

Ceterum ad claſſem Siliceorum in ſyſtemate Schoerlus referendus et quidem inter corneum lamelloſum (*Hornblende*) et Zeolithen ponendus mihi videtur.

Quibus in lapidibus aut Saxis repertus eſt Schoerlus.

§. 11. Schoerlus plerumque aliis lapidibus inſidens occurrit, ita e. g. ſaepe in *Cryſtallo montana* et *Quartzo*; in *Trapezio* (Olonez; celeb. Georgi in Min. Brünnichii); in *lapide calcareo* (in Septemcaſtris, Heidinger; Lilkyrkies, Cronſtedt); in *Smectite* (Tyrolia); in *Argilla* (ad Dunnam et ad Petſhoram; cel. Geor-

Georgi); in *Arena* (ad Schilkam) in *Topazio* (Werchoturskoy Ural. Georgi teſte celeber. *Pallas*); in *Petroſilice* (Olonetz); denique etiam in *lapide ollari* et ſ. p.

Communiter autem in montibus primitiuis occurrit, et aliis lapidibus admixtus ſaxa vel lapides compoſitos conſtituit, ita prope Storzing in Tyrolia (Heidinger) *Schoerlus ſpatoſus* cum *Granatis*, quemadmodum etiam ſe habet *variolites* nonnullorum; Rönitz in Hungaria, et Zillerthal in Tyrolia (*Heid.*) *Schoerlus* cum *Quarzo* et *Mica*; Dresdae (Heidinger teſte Gerhardo) *Schoerlus* cum *Iaspide* et *Spatho ſcintillante*; in Styria ad Murram *Schoerlus* cum *Corneo ſquamoſo* et *Granatis*; in Septem caſtris (Heid.) *Schoerlus* cum *Quarzo* et *Spatho ſcintillante*; ita etiam *Schoerlus* cum *Quarzo*, *Spatho ſcintillante* et *Mica*; *Granito nero* Ferberi continet *Schoerlum* cum *Quarzo* et *Spatho ſcintillante*; *Sauſſure* (Voyages. T. 4.) mentionem fecit de *Schoerlo* cum *Granatis* et *lapide Nephritico*; in monte St. Gothardi *Schoerlus radiatus* cum *lapide Ollari*, *Corneo ſquamoſo*, *Schoerlo columnari*, et *Schoerlo Electrico* (Höpfner); in Schneeberga *Schoerlus* cum *Quarzo*; in Lacu Lehmanno *Schoerlus* cum *Corneo ſchiſtoſo* et *Spatho calcareo*; in Rhetia et Styria *Schoerlus* cum *Spatho ponderoſo*; celeber. Ferber mentionem fecit *Schoerli* cum *Mica* et *Granatis*; item cum *Mica* et *Spatho calcareo*. Plures alias Schoerli combinationes enumerat cel. Höpfner.

Celeber. Ferber et Faujas de St. Fond memorant etiam de Schoerlo in Lauis, Baſalte, aliisque productis volcanorum reperiundo. Nonnulli aſſeuerant Schoerlum nonnumquam Mineras vel Metallum admixtum continere. Equidem ipſe Schoerlum cum Argento puro adhaerente vidi.

Deni-

Denique, vt nihil omittam, ſaepe Schoerlus in venis metalliferis, et quemadmodum celeber. Gerhardus aſſeuerat e. g. in Neurode comitatus Glazii in montibus ſtratoſis occurrit.

Coniectura circa eius ortum.

§. 12. Nullum fere dubium eſt, Schoerlos, qui in montibus primitiuis occurrunt, per viam humidam formatos fuiſſe. Aſt iſti Schoerli (ſi illi vtique veri ſunt Schoerli) qui in Baſalte, Lauis nonnullis et in vniuerſum in productis volcanorum paſſim inſperſae occurrunt exceptionem facere videntur. Hinc nonnulli credunt illos per viam ſiccam formam ſuam accepiſſe: equidem ipſe cryſtalla fibroſa aliaque in Baſalte et Lauis nonnullis vidi. Sed ſi concedendum eſt, vtraque via Schoerlum generari poſſe, tunc omnino inter materiem per viam humidam formatam et eam, quae ope ignis extitit nullum diſcrimen obſeruari poſſet. Sin autem Schoerlus per viam ſiccam formatus ab eo, qui ab aqua generatus eſt plane diuerſus eſſet, aliam omnino monſtraret naturam, ac Schoerlus proprie ſic dictus. Alia argumenta huc ſpectantia in diſſertatione de Baſalte protuli. Sed illa, quae ſequitur explicatio de formatione cryſtallorum in Lauis, et in vniuerſum in productis volcanorum maxime probabilis mihi videtur: Schoerlum ſcilicet per iteratam diſſolutionem humidam nonnullarum particularum in rimis et cavernis materiae iam fuſae formatum fuiſſe. Materiae ad Schoerlos formandos ſatis in Lauis exiſtere neminem infitias iturum ſpero, et nullum porro fere dubium eſt in caſu tam turbulento, qualem volcani produnt, vbi omnia elementa inter ſe certare videntur, humorem etiam in materiem fuſam penetrare poſſe, qui poſtea per maſſam tenuiſſimis particulis diſtributus, difficilem ſibi exitum inuenit, et quem quidem in Lauis exiſtere ex recentiſſima obſeruatione Cel. Dolomieu cognoſcere licet.

licet. At et vaporem ſolum ad haec cryſtalla formanda aptum eſſe iudico et aptiorem quidem humido fluente; quippe qui in rimis ſpiſſimae Lauae nonnunquam incluſus, particulas ope caloris, exemplo Machinae Papinianae citius perfectiusque diſſoluere et vel paruo accedente frigore eas ſub forma cryſtallorum reponere poteſt. Hoc modo Schoerli cryſtalla in ſpiſſimis lauis, quales Cel. Ferber aliique obſeruarunt, ſaepe formatas fuiſſe, iudico. Alia tamen nonnulla cryſtalla per viam etiam ſiccam formari poſſe, propriis obſeruatiunculis innixus numquam negabo.

DE TELA, QVAM DICVNT, CELLVLOSA. OBSERVATIONES.

Auctore
C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. die 15 *Mart.* 1790.

§. 1.

Siue inermibus ſiue armatis oculis celluloſam ſubſtantiam conſideres; neque cellulas vllibi in ea, aut poros caueasue, neque lamellas inuenies, cellas continentes, aut lata foliola, aut fila, interſtitiis diſtincta; quemadmodum ſcilicet celluloſam imaginari ſolemus, vtque vulgo docetur et demonſtratur; niſi ipſe eam diſtrahendo in fila aut laminas, antequam obſerves, finxeris.

§. 2. Triginta fere anni ſunt, ex quo quaerere coepi has cellas, *natura formatas*, et textum, vel texturam, vt dicunt, celluloſam. Nunquam aut cellas, aut textum reperi. Subcutaneam inquiſiui ſubſtantiam, quae adipem continet, aut vacua a cute ad partes ſubiectas tranſit. Inquiſiui profundiorem laxioremque illam, in qua arteriae venaeque et nerui natant. Diremi eam, qua muſculi inter ſe connectuntur, et eam ſubtiliorem, quae in muſculos intrat, quae inter faſciculos interque fibras eorum ſe inſinuat, easque a ſe mutuo diſtinguit. Et eam denique tenerrimam, quae inter fibras muſcula-

culares penetrat, quaeque inermem oculum fugit, microſcopio ſum proſecutus. Neque eam neglexi, quae a magnis arteriis laxior ſenſim ſenſimque abit, easque cum partibus vicinis connectit, neque eam, qua tunicae viſcerum tunicatorum inter ſe cohaerent, aut qua membranae variae aliis partibus annectuntur. Vbique continuam ſemifluidam, vel conglutinantem vel connectentem, ſubſtantiam reperi; celluloſam nunquam vidi.

§. 3. Et tamen vix vlla pars, aut ſubſtantia corporis, notior eſt anatomicis celluloſa. In omnium mente et oculis eſt. Nemo non eam quotidie videt, tractat, diſſecat, ſolvit ab aliis partibus et aufert. Videmus cellas in hac ſubſtantia et celluloſam texturam, lamellasque eius et lata folia, aut fila tractilia et interſtitia longa, quamprimum ſcalpellum corpori admouemus. Vbi cutem diſſecueris, celluloſa eſt, quae primum ſe offert. Quamcunque partem praeparare ad demonſtrationem volueris, ex celluloſa ea euoluenda eſt. Haec omnes partes membrorum corporis inuoluit, omnes inter ſe connectit et conglutinat, omnes abſcondit; vt praeparatio anatomica nihil aliud fere ſit, quam enucleatio partis alicuius ex celluloſa. Quare et ſola celluloſa ea fere ſubſtantia eſt, quae non vt aliae partes arte praeparari ſolet ad cognitionem et demonſtrationem. Nam ſatis ſuperque haec ſe ipſa manifeſtat, quae remouenda ſcilicet vbique ſit multo ſaepe labore ad partes, quas quaerimus, detegendas et obtinendas. Verum haec ipſa cauſa mihi eſſe videtur, cur tamdiu nobis fallax textura celluloſa illuſerit.

§. 4. Non aliter enim haec ſubſtantia obſeruatur, niſi dum duae partes detegendae et cognoſcendae, vel demonſtrandae, ex illa euoluuntur. Hoc autem vt rite fiat, neceſſe eſt, vt laxior molliorque et mobilis ſubſtantia, quominus cultro cedat,

cedat, forcipe prehendatur, a parte explicanda, cui adhaeret, abſtrahatur et extendatur, eaque ratione ab ea reſecetur. Sic ergo in fila aut laminas ſemifluida et tenax ſubſtantia et in celluloſam telam extenditur. Neque apparet facile ſubſtantia niſi inter duas partes, ea conglutinatas; velut inter muſculos duos, aut duas membranas, aliasue partes. Hae admodum vicinae ſemper ſibi mutuo accumbunt, ſubſtantiamque inter ſe contentam abſcondunt. Obſeruari ergo non poteſt, niſi remotis diſtentisque a ſe mutuo partibus ipſa conglutinans quoque ſubſtantia ſimul extendatur, quae, niſi in fila aut laminas tenuiores diſtracta, eo vsque, quo ſolet extendi, et quo eam, vt diſtincte obſeruetur, extendere oportet, extendi non poteſt. Neque etiam accuratius nobis ſubſtantia obſeruari poſſe videtur, quam ſi extenſa oculis offertur. Sic omnibus modis ergo celluloſam ſubſtantiam fingimus, antequam eam obſeruamus.

§. 5. Haec ea imprimis mihi eſſe videntur, artificia quaſi, quibus textus celluloſi idea atque imago ſe nobis inſinuauerit. Acceſſit deinde argumentum ſpecioſum, quo, quae per ſe iam ſatis clara atque manifeſta eſſe videbantur, etiam pulcherrime demonſtrarentur. Eſt ea conglutinanti huic ſubſtantiae indoles, communis fere cum omnibus corporibus ſemifluidis, aliquo tenacitatis gradu praeditis, vt impreſſioni cuicunque facile cedat quidem, ſed ea ſolummodo ſub conditione, vt particulae eius, dum ab aliis ſeparantur, alias continuo inueniant, ſibi vicinas, quibuscum denuo cohaereant; vt quatenus ab illis ſecedunt, eatenus et his ſimul ſe adiungant; vbi ea conditio non fuerit, difficilius ſoluatur. Hinc ea proprietas enaſcitur ſubſtantiae huius glutinantis pariter atque reliquorum corporum ſemifluidorum tenacium, vt in fila facile extendatur tenuia, fila autem ipſa difficilus tandem rumpantur.

pantur. Eidemque fundamento et haec altera innititur ſingularis proprietas, vt corpora non modo quaecunque, ſolida vel fluida, facile in illam penetrent in eamque ſe immittant; ſed vt fluida quoque, eo quidem magis, quo ſunt fluidiora, faciliusque diuiſibilia, maxime ergo aer, inſinuando ſeſe in conglutinantem hanc ſubſtantiam, vti et in alia eiusmodi ſemifluida aut fluida corpora tenacia, in bullas ea extendat. Aqua ſapone mixta, eoque aliquem tenacitatis gradum nacta, flatu in bullas innumeras extenſa, mirabili ſaepe aſpectu, notiſſimum huius rei exemplum eſt.

§. 6. Pari ratione ergo conglutinans quoque, ſiue celluloſa dicta, ſubſtantia et impreſſioni cuicunque facile cedit, in fila facile extenditur, et aëre immiſſo in bullas efflatur. Aqua, mercurius, pus, non modo penetrant in celluloſam, ſed longis ſaepe itineribus in ea proſerpunt. Ipſa ſolida corpora aliena, caſu quocunque immiſſa, in remotiſſimas ſaepe corporis regiones per eandem ambulant. Tracta celluloſa in fila tenuiſſima facile extenditur; difficilius tandem fila penitus rumpuntur. Sic aere in celluloſam introducto bullae copioſae, maiores, minores, facile excitantur, et vſus iſte laniorum notiſſimus eſt. Caſu quoque accidit ſaepe, vt varie tractata celluloſa, extenſa, compreſſa rurſum, aut agitata, aer ſponte ſe inſinuet, bullasque efficiat. Mirum eſt, in quam enormem molem corpus humanum, vel variae eius partes, ſubcutanea imprimis, aut vniuerſa celluloſa aere inflata extendi poſſunt. Id arte quidem effici poteſt, et emphyſemate pariter haud raro efficitur. Et hydrops quoque in magnam molem ſcrotum, aliasque partes ſimili prorſus ratione extendit. Verum ſi inter tunicas viſcerum tunicatorum, velut inter inteſtinorum tunicas, quibus parcior firmiorque et tenacior conglutinans ſubſtantia intereſt, aere modice inflato, viſcera aut

tunicae

tunicae ſiccantur; goſſypii fere alibi, alibi ſpumae inſtar nitidiſſima apparet celluloſa textura formata; cuiusmodi pulcherrima inter Lieberkühniana praeparata exempla exſtant.

§. 7. His omnibus ergo texturae celluloſae exiſtentiam manifeſto demonſtrari, creditum eſt. Nimirum non bullae, vt facile intelligis, aere inflato in ſubſtantiam ſemifluidam tenacem, efficiuntur; id enim in mentem ſane non venit; ſed quae collapſis lamellis cellularumque parietibus haud ſatis apparet celluloſa tela, eius nunc cellae, parietibus aere inflato eleuatis, diſtinctius cernuntur, tela celluloſa ipſa manifeſtius nunc obſeruatur. Nam quin prius exſtiterint cellae iſtae patefactae et textura celluloſa, quae hac ratione apparet, eo minus dubitari poterat; cum, niſi exſtitiſſent, non potuiſſent inflato aere in conſpectum venire. Eandem ergo texturam emphyſema quoque demonſtrat, et hydrops, vbi aqua cellas replet, parietesque earum extendit, et pus, quod per cellas repit, et mercurius iniectus. Eandem ſolida corpora, globi ſclopetarii, alia, demonſtrant, quae proprio pondere per celluloſam hanc ſubſtantiam proſerpunt, in aliaque loca migrant.

§. 8. Verum res ipſa iam errorem facile indicat. Qui poteſt globus ſclopetarius per cellulas repere? intrare in eas et exire ex iisdum per orificia earum et foraminula, quibus inter ſe mutuo communicant? cum decuplo aut centuplo cellis ipſis, vti plérumque formata obſeruari ſolent, maior ſit. Si hydrops repletis aqua cellis naturalibus fieret; nunquam in tam enormem molem ſcrotum extendi poſſet, quam anaſarca efficit. Eleuaret aqua collecta parietes cellarum, vti ipſi Auctores volunt, neque extenderet ergo cellas niſi ad naturalem earum magnitudinem vsque; quemadmodum ſpongia attracta aqua extenditur. Tantos tumores, quos efficit, non efficeret. Id ipſum de emphyſemate dici poteſt, quo adeo vsque cor-

pus,

pus inflatur nonnunquam, vt ſolitam humanam figuram perdat, veſicae formam fere induat. Idemque a pure ſub cute collecto in variolis confluentibus peſſimis haud raro fieri ſcribitur. Haec a cellis natura formatis, ſua naturali magnitudine circumſcriptis, aere vel aqua vel pure repletis, etiam repletiſſimis, tamen fieri non poſſunt. Denique dum laniorum more ſubcutanea celluloſa inflatur, vel ea, quae muſculos involuit, quid vides niſi bullas manifeſtas? Non tela celluloſa, qualem vulgo imaginamur, ſed verae bullae apparent, omnino clauſae, figura pariter ac magnitudine diuerſae, vt quaedam oui gallinacei fere circumferentiam ſaepe habeant, aliae piſo ſint minores, aliae vix granuli magnitudinem aequent, oculoque armato ſint obſeruandae; quemadmodum in ſpuma aquae ſaponatae pro maiori vel minori ſaponis admixti portione maiorique vel minori inde producta tenacitate, et pro varia aquae agitatione maiores vel minores bullae apparent. Qui bullae ergo eiusmodi poſſunt pro tela celluloſa haberi?

§. 9. Itaque haec ipſa, quibus fulciri ſolet communis opinio de celluloſa tela, et quae pro argumentis veritatis huius opinionis traduntur, eam refutare potius et euertere vides. Sed quid argumentis opus eſt, aliunde petitis, et rationibus, alienis obſeruationibus ſuperſtructis, cum celluloſa ſubſtantia ipſa, vbique obuia ſit, quae oculis poſſit conſpici et manubus tractari? quae inermibus pariter atque, ſi opus eſt, armatis perluſtrari et disquiri poſſit? Hanc ipſam ergo, vti in variis locis, inter muſculos, ſub cute, ad arterias, ſe habeat, conſideremus.

§. 10. Si duae portiones, aut faſciculi duo, muſculi alicuius (Tab. VII. fig. 1. *a. b.*) ſibi mutuo, vt ſolent, in corporibus imprimis minus obeſis, contigui, (Tab. VII. fig. 1. *c. c.*) conglutinantemque ſubſtantiam inter ſe abſcondentes, modi-

modice a ſe mutuo diſtrahuntur, (Tab. VII. fig. 1. *d.*) vt illa in conſpectum veniat (fig. cit. *d.*); aequalis huius ſubſtantiae et continua ſuperficies apparet, nullis foraminulis, filis eminentibus, aut laminis, diſtinctis nullis interrupta. Si idem hoc anguſtum interſtitium portionum muſcularium, glutinante ſubſtantia repletum, microſcopio deinde conſideratur (Tab. cit. fig. 2.); ſuperficies pariter continua eſt, ſed minus aequalis et polita, lineolis quippe innumeris variis, minutiſſimis, inſignita, foraminibus tamen, aut eminentibus particulis, lamellis, veluti in noſtris ideis exiſtunt, variis, oblique aut recta poſitis, planis aut erectis filisque varie ductis, alueolos continentibus, omnino diſtituta.

§. 11. Superficies haec plana, aut leuiter concaua potius et continua, ſubſtantiae dictae cellulofae inſignis lamina primo aſpectu eſſe videtur, tractione, quamuis modica, facta. Non eſt tamen. Eſt ſuperficies huius ſubſtantiae, quae interſtitium vniuerſum inter duas portiones muſculi diſtractas replet, interſtitiique formam exacte induit. Haec planam ergo, aut leuiter concauam in parte hac ſublimi, vbi interſtitium latiſſimum eſt, ſuperficiem refert. Profundius continuo anguſtior in tenuem laminam erectam, reliquas muſculi portiones, non diſtractas, ſibi mutuo accumbentes, a ſe inuicem diſtinguentem, abit. Color ſubſtantiae obſcure griſeus apparet. Idemque phoenomenon ſe offert, ſiue ſecundum longitudinem fibrarum, vti in hoc experimento, (fig. 1. 2.), ſiue transuerſim portiones muſculi, aut muſculos duos diuellas.

§. 12. Si duae portiones muſculares, communi cellulofa ſubſtantia obductae (Tab. cit. fig. 3. *a. b.*) eademque inter portiones continuata diſtinctae, (Tab. cit. fig. 3. *c. d.*), primo modice a ſe inuicem in aliqua parte diſtrahuntur; idem quod in priori experimento phoenomenon apparet. Muſculi

celluloſa obducti, aequalem nihilominus ſuperficiem offerunt, ipſique ſua rubedine, modo pallidiore, fibrisque minus diſtinctis, vti notiſſimum quidem eſt, per ſubſtantiam, qua teguntur, tranſparent. Interſtitium, leuiori tractione productum, obſcure griſeum colorem habet. Si iſtas deinde portiones musculares magis paulatim a ſe mutuo diſtrahere pergas; quae pellucida ſubſtantia portiones obducit, quae colore obſcure griſeo interſtitium inter eas replet, aequalem, continuam, leuiter concauam, ſuperficiem efficiendo, in fila transuerſa, tractioni conſentanea, ſatis craſſa longaque, extenditur (Fig. 3. *e.*). Si nimium non traxeris; fila eleuata ſubiectae ſubſtantiae adhucdum adhaerere, nudis etiam oculis manifeſtim apparet. Si trahere pergas; prorſus a ſubiecta ſoluuntur fila, integraque et perfecta fila efficiunt, et longiora. Si microſcopio haec perluſtrantur; (Fig. 4.) accuratius fila, dum ſubiectae ſubſtantiae adhuc adhaerent, columnas eſſe vides ſemicylindricas (fig. 4. *c. c. c.*); vbi magis diſtractae portiones muſculares, columnaeque magis extenſae, diminuta craſſitie; vti magis magisque eminent columnae, vti proſiliunt tandem, a ſubiecta ſubſtantia ſolutae, integros cylindros ſeparatos efficiendo, exacte obſeruare licet.

§. 13. Verum ſi remittuntur portiones muſculares, vbi columnas ſemicylindricas incluſa celluloſa efficit; columnae euaneſcunt prorſus, aequalis in anguſtiori interſtitio ſubconcaua ſuperficies redit, ſtatus vbique priſtinus apparet. Imo etiam dum eo vsque portiones diſtractae, vt ſeparatas cylindricas columnas ſubſtantia incluſa efficiat; tamen ſaepe, conglutinatis denuo inter ſe et confluentibus columnis in vnum continuum, aequalis eius ſuperficies, portionibus remiſſis, redit. Si diu producta fila aeri expoſita manent, vt ſubſtantia ſicceſcat; fila tandem conſtant. Denique et hoc memoratu dignum

num videtur, vt fila breuia producta in decuplo ſaepe longiora facili negotio continuata tractione extendi queant.

§. 14. His omnibus, ſubſtantiam, qua musculi obducti, minime celluloſam, ſed continuam, aequalem, ſemifluidam, tenacem et pellucidam ſubſtantiam eſſe, omnino demonſtratur. Dum musculi duo vicini, aut portiones musculi, communi, ſed tenuiori, celluloſa, adipe priuata, obducti et coniuncti, pallidiori rubedine fibrisque minus diſtinctis apparent (§. 12.); neſcio, qua fieri ſolet animi inaduertentia, vt vel nullam muſculis incumbere ſubſtantiam putemus; cum ipſi ſcilicet musculi, pallide rubri, cernantur; celluloſa iis ſuperſtrata pellucida non appareat; vel tamen, cum nihilominus celluloſam illam auferamus, vt diſtinctius fibrae, auctaque rubedine musculi, appareant, glutinoſam tenuem pellucidam illam, musculis inductam, cruſtam, eiusque aequalem et politam ſuperficiem non obſervemus. Hoc certum eſt, hac ſola quotidiana experientia omnem celluloſae dictae naturam patere. Nam *aequalis* et *continua* haec musculis ſuperſtrata ſubſtantia, ſiue inermibus ſiue armatis oculis viſa apparet; eaque tenuis et *ſubpellucida* quidem; vt tecti ea musculi, tanquam ſi nudi eſſent, rubedine tamen minuta et minus diſtinctis fibris, transpareant. Eademque continua ſubſtantia, vbi ad interſtitium venit, et tranſire ſuper illud et deſcendere in idem *continua*, idemque replere, ſimul cernitur; vt, quemadmodum ſolent ſubpellucida ſemifluida corpora, obſcure griſeo colore in interſtitio appareat. Dum diſtractis vero portionibus muscularibus celluloſa ſubſtantia, quae interſtitium portionum replet, tum et quae ipſas portiones obducit, extenditur; in fila haec, vti ſolent tenacia ſemifluida corpora tracta, fingitur (§. 12.). Et patet ergo, dum musculos praeparando fila celluloſa oriri et in conſpectum venire vides; ea artificia eſſe, a nobis formata. Neque vero fuiſſe putaueris fila,

 ſibi

ſibi mutuo incumbentia, non diſtincta ideo, et inconſpicua, quae extenſione in conſpectum veniant. Nam dum trahere incipis, vides microſcopii ope, qua ratione leuata tractione ſubſtantia tenax, fila formatura, cum ſubiecta adhuc cohaereat, columnasque efficiat ſemicylindricas; videsque qua ratione, tractione aucta, a ſubiecta ſubſtantia denique ſoluatur, ſeparataque fila, aut columnas cylindricas integras producat. Neque, ſi vera fila celluloſa naturalia eſſent, quas produxiſti, breviores craſſioresque columnae in decuplo longiora, tantoque tenuiora fila extendi poſſent. Idem vero experimentum et *tenacitatem* ſemifluidae ſubſtantiae demonſtrat. Nam niſi tenax ſit corpus et ſemifluidum, in fila ſe extendi non patitur. Denique dum remiſſis portionibus muscularibus fila rurſus coeunt in continuam et aequalem ſubſtantiam, qualis fuit, antequam extenderetur (§. 13.); et *glutinoſam* hanc ſubſtantiam eſſe aliqua ratione, et *ſemifluidam*, manifeſtum eſt. Etenim hac ipſa glutinoſitate penitus fila inter ſe cohaerent et in continuum coeunt; nec niſi ſemifluida ſubſtantia eſſet, in vnum coire continuum poſſent. Continua ergo et aequalis, ſemifluida, tenax, tractilis, glutinoſa, ſubpellucida ſubſtantia ea eſt, quam vulgo celluloſam dicimus.

§. 15. Dum musculi portionibus diductis incluſa celluloſa in fila extenditur (§. 12.), vel dum varie agitatur, caſu ſaepe accidit, vt aer irrumpat in celluloſam, bullasque aereas minimas variae magnitudinis atque figurae efficiat (fig. 4. d.). Sic factum in eo experimento, cuius productum figura 4. exhibui; vbi ſcilicet ſub microſcopio mediocriter augente musculares portiones diducebam viciſſim et remittebam. Nimis manifeſto, nimisque pulchre vidi, vti cum impetu, imo cum ſtrepitu aliquo, vti videbatur, irrumpens inter fila aer copioſas momento bullas per celluloſam diffuderit. Vbi musculi remittun-

tuntur; ſemifluida tenax ſubſtantia propria ſua vi attractrice confluit rurſus, aer, qua via ingreſſus, exit, bullae pariter omnes atque fila euaneſcunt, ſubſtantia in continuum redit. Si denuo muſculi diſtrahuntur; nouae bullae, noua fila, oriuntur. Si vlterius portiones muſculares a ſe mutuo diducere, eoque et reliquas ſimul earum partes diſtrahere pergas; vti continuo magis bullae ſe extendunt, totumque tandem interſtitium inter portiones muſculares replent, bullis et magnitudine et numero auctis, clare vides.

§. 16. Accidit quoque frequenter, vt muſculis remiſſis aer incluſus, bullis vbique clauſis, exitum nullum inueniat. Tum remiſſis muſculis bullae comprimuntur quidem diminuique aliquantum magnitudine hinc inde videntur, at minime euaneſcunt, diductisque iterum muſculis eaedem bullae eadem magnitudine et forma in conſpectum denuo prodeunt.

§. 17. Haec ergo veſicularis illa textura eſt, quae imprimis aere inter membranas, celluloſa coniunctas, inflato obſeruari ſolet; quae caſu etiam nonnunquam, at rarius, dum vaſa aut muſculi aut aliae partes ad demonſtrationem anatomicam praeparantur, apparet, quam vbique ergo, etiam vbi non apparet, ſupponimus, et quam celluloſam tandem texturam, diverſam omnino etiam a veſiculari illa ſtructura, et imaginamur et dicimus. Natura ergo nulla aut veſicularis aut celluloſa textura datur. Quae ſponte paſſim varie tractata ſubſtantia conglutinante oriri videtur veſicularis ſtructura, ipſa hac tractatione et agitatione, aere intromiſſo, in bullas ſubſtantiam extendente, efficitur. Veras cellas, laminis factas, ad angulos varios inter ſe compoſitis, certo modo formatas, quales plerumque imaginamur, nunquam, neque natura neque arte productas, vidi. Quae in praeparatis ſiccis monſtrari ſolent, aut quae poſſunt monſtrari, cellarum et laminarum ſpecies, quae inflatione et exſic-

ſiccatione partium variarum fiunt, quas partes deinde, vt interior ſtructura appareat, diſcindere oportet, eae bullae primum, deinde ſiccatae veſiculae fuerunt, quae, diſſectione tandem diviſae, dimidias dilaceratasque et ſiccatione varie corruptas veſiculas, proinde cellarum laminarumque ſpecies referunt.

§. 18. Neque eleuatis parietibus, aere intromiſſo, veſiculas ſe manifeſtare, quae parietibus collapſis prius diſcerni non potuiſſent, haud difficilius experimentis illis iisdem (§. 15.) euincitur. Neque magnitudine enim, neque forma determinata ac certa, veſiculae productae gaudent, quae nunc maiores, nunc minores, apparent, vt microſcopio ſint diſcernendae. Eaedem veſiculae, quae minimae fuerant, flatu, aut introductione aeris quacunque, continuata in magnas bullas efflari poſſunt, pariter atque fila, quae breuia prius, in longa, tantoque tenuiora, facile extenduntur. Denique, ſi musculis diſtractis introductus in celluloſam aer bullas produxerit; ſi bullis euaneſcentibus deinde, remiſſis musculis aereque egreſſo, in continuum celluloſa redit; et denuo diſtractis musculis aer denuo introducitur; non eaedem, ſed nouae prorſus, nunc bullae, figura, magnitudine, numero, loco et ſitu diuerſae, oriuntur. Vt facile videas, non cellas conſtantes eſſe, aut veſiculas conſtantes, quae nunc, parietibus collapſis, non appareant, nunc appareant, parietibus extenſis; ſed veras bullas, flatu productas, confluente ſubſtantia omnino euaneſcentes, bullasque iterum, ſed nouas, eſſe, a prioribus diuerſas, quae denuo, aere denuo immiſſo, producuntur.

§. 19. Dum parum a ſe mutuo diductis musculis aequalem conglutinans ſubſtantia, quae interſtitium replet, et anguſtiorem ſuperficiem offert (§. 10. fig. 1. d.); colorem haec, vt dictum eſt, obſcurum habet, griſeum, ſubnigrum. Quam primum vlterius musculis diſtractis rupta ſemifluida et tenax

ſub-

ſubſtantia fila, et intromiſſo aere bullas, producit; niueo candore albet. Eadem ſi lucem inter et oculum ponitur, pellucidiſſima apparet. Si hac ratione microſcopio perluſtratur, pulcherrimum aſpectum praebet, glaciei inſtar hinc cryſtallinam pelluciditatem, inde argenteum ſplendorem offerendo. Si musculis denique induſta pura, pinguedine priuata, obſeruatur; nulla eſſe videtur. Musculi ipſi, quos tegit, ſolita ſua rubedine, aliquanto pallidiores, fibrisque minus diſtinctis apparent.

§. 20. Proprio ergo colore vacua ſubſtantia celluloſa ſua natura pellucida eſt. Inde et musculis induſta cur nulla obſeruetur, patet. Et interſtitio inter musculos profundo, cui ab inferiori parte lux nulla accedere poteſt, incluſa, aquae inſtar, vaſis profundis contentae, obſcura ſubnigra cur appareat, intelligitur. Verum ſi aere intromiſſo in bullas efflatur, aut ſi extenſa et rupta in fila diſpescitur, quae continua fuerat pellucida ſubſtantia; alborem, vt corpora quaeuis pellucida, continuitate interrupta, vt glacies, aut vitrum, contuſum et comminutum, vt aqua, in ſpumam agitata, induit. Nam lux, quae recta continuam ſubſtantiam tranſit, a copioſis in interrupta ſuperficiebus reflectitur. Hic albor eſt, quo fere ſolet ſe celluloſa oſtendere, quem proprium huic ſubſtantiae attribuimus, et qui, tanquam ſi eſſentialis eſſet, definitionem adeo celluloſae vulgo ingredi ſolet. Hic natura ei non ineſt. Niſi continua, nulla, nullaque niſi pellucida ergo, celluloſa reperitur. At interrupta, in fila et bullas extenſa, quod arte ſcilicet noſtra fit, alba apparet. Neque mirum eſt, plerumque albam obſeruari, cum niſi in fila diſtracta copioſior aliquanto obſeruari vix posſit; quemadmodum in ſuperioribus explicatum eſt. Caeterum nec ſemper, vti vulgo dicitur, alba, quin ſaepe, imo frequentius, griſea ſubpellucida quoque celluloſa apparet. Et niueus ille candor, quem in partibus minus humidis maxime obſeruamus,

mus, ſolis bullis aereis, iisque copioſis et minimis, (nam etiam in fila diſtracta celluloſa non ſemper ideo albet) deberi videtur.

Explicatio. Tab. VII.

Fig. 1.

Portiones duorum musculorum aliquatenus a ſe mutuo ſeparatorum, vt celluloſa, qua connectuntur, appareat, ex brachio hominis non obeſi.

a. b. Binae portiones musculorum.

c. c. In his partibus musculi ſibi mutuo contigui celluloſam intermediam abſcondunt.

d. In hac parte media aliquantum diſtracti musculi a ſe invicem. In interſtitio celluloſa apparet. Huius ſuperficies vbique aequalis et continua eſt aeque ac ſubſtantia quae profundius inde inter musculos deſcendit. Neque quidquam celluloſi aut lamelloſi aut poroſi apparet.

Fig. 2.

Pars portionum earundem, vbi diſtractae contentam celluloſam conſpectui offerunt, microſcopio modice augente viſa.

a. b. Portiones musculorum.

c. Interſtitium celluloſa ſubſtantia repletum. Haec et armatis oculis continua et aequalis ſed minus polita apparet; lineolis quippe varie ductis, plurimis, minimis inſignita, foraminulis tamen aut poris cellisque pariter ac lamellis et filis omnino prorſus deſtituta. Neque haec, ſi vel maxime augente microſcopio vtaris, apparent.

d. Portio celluloſae, diſtractione musculorum extenſa. Vid. expl. fig. 3. et 4.

Fig. 3.

Fig. 3.

Portiones duorum musculorum eo vsque a ſe mutuo diſtractae, vt intermedia celluloſa ſubſtantia, quae continua et aequalis hactenus, vt in experimento priori (fig. 1. 2.), apparuit, in fila extendatur, inermibus oculis viſae.

a. b. Portiones musculorum, in parte ſublimiori a ſe invicem ſeparatae et diſtractae, profundius cohaerentes.

c. d. Interſtitium celluloſa repletum.

c. In hac parte celluloſa, quamuis magis quam in priori experimento extenſa, tamen aequalem fere ſuperficiem oſtendit.

d. In hac in fila extendi iam incipit.

e. Portio celluloſae in fila extenſae, quae in nonnullis locis tamen ſubiectae celluloſae ſubſtantiae (*c. d.*) adhucdum adhaerent. Nimirum musculi (*a. b.*) quamuis rubri diſtinctisque ſatis fibris appareant, celluloſa tamen ſubſtantia tenui pellucida tecti ſunt. Nam forcipe haec prehendi et abduci poteſt, quo tum musculi magis rubri, qui pallide ante rubebant, fibrae magis diſtinctae apparent. Quae ergo in fila extenſa celluloſa (*e. e.*) ea puncta musculorum (*e. e. e.*) in ſitu naturali coniunxerat. Quae in interſtitio (*c.* et *d.*) apparet partes eorum (*f. g. f. h.*) nexuerat. Illa ergo (*e. e. e.*) magis, proinde in fila, haec (*c. d.*) minus diſtractione musculorum extenſa eſt.

Si musculi (*a. b.*) remittuntur; ſubſtantia haec ſemifluida et tenax, quae in fila extenſa erat, confluendo rurſum in continuam et aequalem ſubſtantiam redit.

Fig. 4.

Duae portiones muſculi vti in experimento priori eo vsque diſtractae, vt celluloſa, qua coniunguntur, in fila ſit extenſa, quae tamen ſubiectae celluloſae ſubſtantiae adhucdum adhaereant; microſcopio in ipſo ſubiecto viſae.

a. b. Portiones muſculi, in parte ſublimiori a ſe mutuo diſtractae, profundius adhucdum cohaerentes. Etiam harum portionum aliquam tantummodo partem, qua maxime opus fuit, in figura hac, vti et in praecedentibus, exhibui.

c. c. c. Fila, vti in experimento priori ex ſuperficie alterius diſtractarum partium muſculi in alterius ſuperficiem extenſa, at ſubiectae ſubſtantiae celluloſae adhucdum adhaerentia. Haec ergo non integros, quos ſoluta mediis partibus fila ſub microſcopio repraeſentarent, cylindros, ſed ſemicylindricas columnas efficiunt. Nimis clare atque diſtincte, nimisque facile hae ſemicylindricae columnae, vti cum ſubiecta continua glutinoſa, quam celluloſam dicunt, ſubſtanſtia vtrinque lateribus ſuis continuent, obſeruari et conſiderari poſſunt, vtque nihil aliud ſunt, quam eadem haec continua ſubſtantia glutinoſa, in fila extenſa. Neque plena, ſi haec forte non ſufficiant, demonſtratio deeſt. Nam ſi, intuendo armatis oculis fila, muſculos remittis; in continuam haec vides redire ſubſtantiam glutinoſam, ex qua extenſa orta ſunt, aequali ſuperficie praeditam, interſtitium muſculorum pariter replentem et muſculos obducentem ipſos. Si contra magis muſculos a ſe inuicem diſtrahas, filaque extendas; haec prorſus a ſubiecta ſoluuntur, cylindros integros perfectosque microſcopio viſa efficiunt. Vides denique vt

ſenſim

ſenſim ſenſimque, ſi muſculos ſenſim diſtrahas, continua, aequali ſuperficie praedita, ſubſtantia ſtriatim ad interualla eleuetur, vti ſemicylindricas primo columnas, deinde cylindros integros producat, vti, muſculis remiſſis ſenſim, ſenſim in continuam et aequalem ſubſtantiam coeant rurſum haec fila, extenſione producta, quae natura formata credita celluloſa dicuntur, quorumque interſtitia cellas vocamus.

d. d. Interſtitia columnarum, quorum ſuperficies in ſuperficies columnarum continuant.

e. e. e. Celluloſa interſtitium replens, vbi iam incipit diſtractione muſculorum in fila extendi.

f. Celluloſa interſtitium replens. In hac parte cum muſculos diſtraherem, aer cum impetu et cum ſtrepitu aliquo, vti videbatur, in celluloſam irrupit, innumerasque momento veſiculas variae magnitudinis produxit. Vbi magis muſculos diſtrahebam, aer ſub columnas (*c. c.*) ilico, veſiculis numero auctis, penetrabat, totumque tandem interſtitium replebat. Idemque phoenomenon ſaepe, dum varie celluloſa tractatur, accidit. Ex veſiculis illis lamellae celluloſae, quae nonnunquam, ſed rarius quidem, et vix niſi in partibus ſiccatis, quarum celluloſa aere ante inflata fuit, quando partes, vt interior ſtructura appareat, diſſecantur, aut lacerantur, in conſpectum veniunt. In partibus recens diſſectis quod celluloſae telae, aut eius ſimile, occurrit, filis fere ſolis eorumque variis interſtitiis conſtare ſolet.

MÉMOIRE
SUR LA MANIERE,
DONT ON FAIT L'ACIER DES MINES DE FER DE LA SIBIRIE.

Par

Benoit - François - Jean Hermann.

Préſenté à l'Académie le 11 *Février.* 1790.

L'art de faire de l'acier a occupé en tout tems les financiers, les métallurgiſtes, les fabriquans & les faiſeurs de projets. La plûpart d'eux y cherchoient leur fortune, quoiqu'ils fuſſent dépourvus de connoiſſance ſolide des matières requiſes à la fabrication de l'acier. Il n'y en eut que peu, qui fuſſent aſſez inſtruits, pour s'en occuper avec quelque ſuccès. Mr. de Reaumur fut de ce petit nombre; les Mémoires qu'il en a donnés ſéparement, ou, qui ſont inſérés dans ceux de l'Académie des ſciences de Paris, en ſont preuve. Mais quoiqu'on ait travaillé & ecrit beaucoup ſur ce ſujet, ſurtout dans ce ſiècle ſi fertile & ſi riche en projets, on eſt encore bien loin d'avoir atteint la connoiſſance parfaite de cet art, & de toutes les circonſtances, dont il depend; d'où il eſt arrivé, que tant d'entrepriſes couteuſes, qui ont été faites en pluſieurs pays, ont échoué, & qu'une foule de Mémoires & de mauvaiſes

vaiſes deſcriptions de fabriques d'acier ait paru, dont les auteurs ne furent pas capables d'examiner & d'apprecier les principes & les manipulations, dont tout dépend dans l'exécution.

On ſait, que l'acier eſt préparé de deux manières, ſavoir: par la cémentation ou par la fonte. On le fait de la prémiere manière principalement en Angleterre, & de la ſeconde en Suede, en Allemagne, & ſurtout à Schmalcalde, en Stirie & en Carinthie, où le meilleur acier eſt préparé. La queſtion, s'il eſt plus avantageux de faire l'acier par cémentation ou par la fonte, dépend des circonſtances locales; mais s'ils ſe trouvent dans un endroit beaucoup de bois, & les mines de fer propres à l'acier, il eſt ſûr, qu'il vaut toujours mieux le faire par la fuſion; car il deviendra plus fin & meilleur, & ſera en même tems moins couteux. Le point capital y eſt d'avoir les mines convenables; car quoiqu'on puiſſe faire l'acier de toute ſorte de mine de fer, l'une y eſt plus propre qu'une autre, pour en obtenir le meilleur acier poſſible dans le plus court éſpace de tems & avec le moins de fraix. On ſait auſſi à préſent aſſez bien, quelles mines y ſervent le mieux, mais on ſait bien moins, quelle eſt à proprement parler la matiere, qui poſſede la propriété de produire dans telle ou telle mine de fer plutôt que dans une autre ce qui conſtitue l'acier, & en quoi le fer en diffère eſſentiellement.

Quant à la nature de l'acier, j'en ai expoſé amplement mon opinion dans quelques-uns de mes ecrits; j'y ai ſoutenu, que l'acier ne ſe faſſe, que lorsque le fer *ſuffiſament purifié eſt privé de ſon phlogiſtique ſuperflu.* La plûpart des chymiſtes croyoient au contraire, que l'acier étoit un fer *purifié & ſuffiſament ſaturé de phlogiſtique*; & je trouve, que quelques habiles métallurgiſtes modernes ont adopté mon opinion. Néanmoins il n'eſt pas encore décidé, pourquoi il eſt néceſſaire

 d'ex-

d'expulſer du fer le phlogiſtique ſuperflu pour en préparer l'acier, & ſi l'acier eſt du fer ſimplement changé parlà, ou une ſubſtance d'une eſpece propre, qui conſtitue le corps, que nous nommons acier.

Je crois avoir trouvé par les expériences, que j'ai faites jusqu'ici, que, quoique l'on puiſſe faire de bon acier de toute ſorte de mines de fer, (dont le produit eſt pourtant plus ou moins avantageux) & que chaque fer ſe convertiſſe en acier plus ou moins abondemment, & qu'ainſi *l'art* le produiſe, l'aptitude plus ou moins grande d'une mine de devenir acier, dépende principalement de la matiere métallique, que l'on nomme dans nos jours *regule de manganaiſe*; (Braunſteinkönig.) Ce corps métallique eſt non ſeulement dans la manganaiſe commune, & dans la mine d'acier ou *Pflinz* (Mines de fer blanches) où les chymiſtes & ſurtout le Chevalier Bergmann l'ont trouvée ſi abondemment, mais il eſt auſſi en général dans toutes les mines de fer, en quantité plus ou moins grande; de là l'aptitude de toutes les mines de fer de ſe convertir en acier; & celles, qui en contiennent le plus, comme la mine de fer blanche & l'hématite, donnent naturellement le plus du meilleur acier; même le fer forgé en contient encore une partie conſidérable; & il a une ſi grande affinité avec elle, qu'il ne peut jamais en être entierement ſeparé, ni elle de lui. La grande affinité, que cette matière a avec le phlogiſtique (ce qui eſt ſuffiſament connu dans la manganaiſe noire commune (Braunſtein) eſt cauſe, qu'ils s'uniſſent étroitement dans le hautfour & dans les forges, & qu'enſuite le phlogiſtique ne puiſſe plus en être ſeparé en partie, que par un feu violent; de là on peut expliquer ce qu'on appelle *bruler l'acier*, (Stahlbrennen) & pourquoi l'acier redevient en quelque manière du fer, s'il eſt rougi dans un feu modéré. La première opération ſe

fait,

fait, pour expulſer du métal tout le ſuperflu du phlogiſtique, ce qui peut être effectué dans un fer, qui contient de la manganaiſe d'autant mieux & plus facilement, que dans une autre ſorte, parceque la manganaiſe a la propriété, de recevoir le phlogiſtique très-vite & copieuſement, & de l'abandonner de même dans une chaleur augmentée.

Explication
de la manière, dont on convertit le fer de fonte en acier dans la nouvelle fabrique de Pyſchminsk, que j'ai établie.

Les réfléxions ſusmentionées ſur la nature de l'acier m'ont ſervi de principe & de baſe, lorsque Sa Majeſté ordonna d'etablir dans une des forges de la Couronne dans les monts d'Oural une fabrique d'acier ſur le pié de celles en Stirie, où la mine de fer ou le fer cru eſt directement converti en acier. Cet art ne fut pas connu jusqu'ici en Ruſſie, comme on peut s'en convaincre par les déſcriptions des forges de fer en Sibirie, ſavemment faites par feu Mr. Schlatter Conſeiller privé; (Tom. II. pag. 107. &c.) car tout l'acier, qui a été fait jusqu'ici, fut preparé de fer en barres vieux ou nouveau, ou du déchet du fer blanc.

L'inconvénient de cette méthode eſt, que 1.) par la manière uſitée de travailler, on obtienne à peine tout ſoit peu plus d'acier (quoique la matiere employée, ſavoir le fer, ſoit beaucoup plus pure) que d'un bon fer cru, & que 2.) les fraix en ſont plus grands, parceque le fer forgé dans le même endroit coute quatre fois plus, & le vieux fer pour le moins une fois autant, que le fer cru, ſans faire mention, que ſi l'on vouloit y employer ſeulement de vieux fer, il ne s'en trouveroit nulle part en auſſi grande quantité, pour en préparer

rer autant d'acier, que l'Empire emploie à divers beſoins & uſages. C'eſt pourquoi on y importoit une très-grande quantite d'acier étranger, ce qui ſe fait encore en partie.

Pour donner une idée de l'ancienne maniére Sibirienne, de faire de l'acier du fer en barres vieux ou nouveau, je remarquerai ſeulement, qu'à Catherinebourg de l'année 1780 jusqu'à 1786, en 6 années, on fit de 3508 pouds $16\frac{1}{4}$ liv. de vieux fer 1856 pouds $16\frac{1}{4}$ liv. d'acier brut (Ouklad) & qu'on y employa $1707\frac{3}{25}$ corbeilles dè charbons de pins. Et de 1779 jusqu'à 1787, en 5 années, on y rafina 960 pouds 20 liv. d'acier brut, & on en retira 679 pouds d'acier rafiné; (складежная сталь) $416\frac{3}{4}$ de corbeilles de Charbons y ſervoient. Ainſi 100 pouds de vieux fer produiſirent 52 pouds d'acier brut, & 100 pouds de celui-ci donnerent 70 pouds d'acier rafiné. Le déchet du premier importoit presque la moitié, & celui du ſecond presque le tiers. Par conſéquent 100 pouds de fer vieux ou nouveau produiſirent 36 pouds d'acier rafiné; pour obtenir 100 pouds d'acier brut, il faloit employer 91 corbeilles de Charbons, & pour 100 pouds d'acier rafiné environ 60 corbeilles, chacune peſant à peu près 20 pouds.

Mais dans la nouvelle fabrique d'acier à Pyſchminsk, éloignée 22 verſtes de Cathérinebourg, & ſituée près de la riviere Pyſchma, la manipulation conſiſte dans ce qui ſuit.

L'acier, qui y eſt fait, eſt tiré entiérement du fer cru, ſavoir des gueuſes de fonte, ſans aucun autre melange. Le fer cru eſt fondu dans la fonderie de Kamensk, éloignée 90 verſtes de la fabrique. Des circonſtances économiques furent la cauſe, que cette fabrique d'acier ne put être établie dans aucune autre forge de la couronne, bien que les mines de Kamensk n'ayant pas la qualité requiſe à l'acier; elles ſont prin-

principalement limoneuſes, lacuſtres, marécageuſes & ſabloneuſes, (вохренная и песчанная руда) avec un très-petit melange d'hèmatite. Tout le diſtrict, ou elles ſe trouvent, étoit cy devant un fonds de mer, ce que prouvent les couches calcaires, remplies des coquilles pétrifiées. Il faloit donc travailler à réparer par l'art, ce que la nature avoit refuſé à ces mines pour les rendre propres à la fabrication de l'acier.

Le haut four (домна) deſtiné à la fonte des minéraux eſt élevé au de là de 12 archines. Pour la fabrication de l'acier on y met à la fois (Колошъ) 19 jusqu'à 20 pouds de minerais, $2\frac{1}{2}$ à 3 pouds de pierre calcaire brulée (Caſtine) & $\frac{4}{5}$ jusqu'à 1. Corbeille (ainſi 16 à 20 pouds) de charbons. Le fer cru eſt purifié au mieux poſſible, & verſé avec des grandes cuillères de fer dans des petits moules oblongs; par là il prend la figure de plaques minces. Pour faire l'acier de ce fer cru, on le transporte à Pyſchminsk, où on le travaille ſur des foyers, dont le creuſet eſt quarré, long et large d'une arſchine & profond d'$\frac{1}{2}$ arch. & garni de plaques de fer fondu. Le touyau eſt de fer forgé, & les deux ſouflets, longs de 5 arch. ſont de bois; celui-là eſt placé presque à plomb, & deſcend dans le Creuſet 3 à 4 verſchoks.

On fait d'abord du fer cru l'acier brut. (укладъ). On commence ce travail en chaufant la loupe, (крицъ) qui eſt le produit du travail antérieur; à cette fin on remplit le Creuſet de ſable du granit décompoſé, où il y a encore un peu de Spath champêtre, (qui ſe change au feu dans une maſſe presque comme de la porcelaine) & on prépare ce lit à la hauteur de main ſous le touyau. On met alors de petits charbons dans le Creuſet, & une certaine quantité de fer cru (Чугунъ) pour la fuſion, mis en partie ſur les charbons, environ un palme du touyau directement vis-à-vis de lui,

en partie auſſi ſur le bord du creuſet, pour l'avancer peu-à-peu. La quantité du fer cru mis au feu doit être determinée ſelon le poids de la loupe à chaufer, & ſelon le tems y requis. S'il y a une loupe de 2 à 3 pouds à chaufer, ce qui peut ſe faire aiſément en 3 jusqu'à 5 heures, il ne faut y employer que 6, ou au plus 8 pouds de fer cru, car en cas contraire il ne pourroit guere être ſuffiſament pénétré en ſi peu de tems par le feu, ni purifié non plus aſſez. Et durant ce travail la fuſion ne deviendroit pas non plus aſſez nette, ce qui contribue cependant beaucoup au perfectionnement du fer cru.

Il n'eſt pas profitable de chaufer à la fois une ſeule loupe, ou ſeulement quelques petites. Le maitre doit prendre de telles meſures, que dans une ½ journée, ou en 6 heures, il puiſſe finir deux loupes, peſant enſemble 4, 5 à 6 pouds, & en ce cas on pourra prendre pour 4 pouds de loupe 6 à 8 pouds de fer cru, pour 5 pouds, 8 à 10, & pour 6 pouds 10 à 12 pouds; mais il achevera rarement dans une ½ journée 2 loupes de 6 pouds, & pour cette raiſon il vaut mieux, qu'il garde 3 à 4 loupes, pour les finir dans une journée, ſavoir en 12 heures. Si elles peſent enſemble environ 6 à 8 pouds, il pourra aiſément y fondre en 2 fois 12 ou 14 pouds de fer cru, qui ſera ſuffiſament purifié à cauſe du tems plus long, qu'il eſt expoſé au feu.

Si l'on met trop peu de fer cru à l'égard du poids de la loupe ou du tems requis à la fuſion, il ſera bien d'une qualité diſtinguée, mais il ne ſera pas profitable, parceque en partie le fer cru manquera à la loupe, & qu'en une autre on y conſume trop de Charbons & de tems. En ce cas il s'épaiſſit trop dans le Creuſet, de manière, qu'il découle rarement, & qu'il faut le rompre du creuſet; ce dernier moyen n'eſt

n'eſt pas profitable non plus, parceque de tels gateaux épais entrent difficilement en fuſion, & requièrent une plus grande quantité de Charbons. Au contraire ſi l'on met trop de fer cru, il ne ſe purifie pas aſſez, & on n'en retirera la loupe, qu'avec peine, pour le moins plus lentement, & quelque fois nullement; au dernier cas elle reſte en maſſe liquide dans le Creuſet, ſans ſe former en loupe; mais elle eſt d'ordinaire trop tenace, (Густо) pour pouvoir découler, il faut la rompre & la refondre avec une nouvelle dépenſe de Charbons & de tems; il provient alors bientôt une bonne loupe.

Si l'on a pris en juſte proportion la quantité du fer cru, le fer de fonte double ou rafiné, (Doppelroheiſen, двойной чугунъ) qui en provient, découle facilement du Creuſet, s'étend ſur le fonds de la fabrique, & forme ſes ſcories ſur la ſurface; cependant il y a communément un réſidu au creuſet; on l'arroſe d'eau, on le retire du lit de ſable, & on l'en purifie. Le fer cru retiré eſt auſſi arroſé d'eau, & delivré de ſcories; ce fer cru double, s'il eſt de bonne qualité, eſt troué dans ces fractures & blanc comme l'argent, ſtrié & presque grenu en ſes parcelles, ayant dans les trous une teinte bleue, jaune & rougeatre; mais celui, qui n'a pas ſa qualité requiſe, eſt bien blanc dans ſes fractures, mais compacte & en petites ſtries; il en provient pourtant une bonne loupe dans le tems requis et par les manipulations convenables. Mais ſi ce fer eſt dans la fracture à demi blanc ſtrié, & moitié gris, & à petits grains, il eſt alors cru encore, & de mauvaiſe qualité; il eſt encore pire, s'il eſt tout-à-fait gris. Maint fer cru double de la fabrique de Pyſchminsk eſt blanc ſtrié dans ſa fracture, & eſt en même tems garni de pluſieurs points gris, comme d'étoiles; (ce qu'on appelle fer cru truité:) quoiqu'il ne ſoit pas mauvais, il n'eſt pourtant

pas

pas de la meilleure qualité; mais il eſt meilleur, ſi outre ces points, dont il eſt marqué, il eſt en même tems blanc, ſtrié & troué. Six pouds de fer cru ordinaire en fourniſſent communément 5 à $5\frac{1}{4}$, & 12 pouds environ 11 pouds de fer cru double. De la qualité de ce dernier dépend beaucoup le produit d'une bonne loupe converſible en acier. Pour l'obtenir on procede dans ce travail important de la manière ſuivante.

Le creuſet eſt rempli de ſable pour ce procédé, comme pour celui du rafinage du fer cru. Le ſable y eſt comprimé le plus fortement poſſible environ à la hauteur de la main ſous le touyan; celui-ci eſt ſoigneuſement enduit d'argille, & on met également ſur le ſable dans le creuſet quelques peles d'eclats de marteau, on le remplit enſuite de petits charbons, & on y met alors le fer cru double. On le poſe droit devant le touyau à la diſtance de quelques doigts; on y jette des charbons frais, & on meut doucement les ſouflets. À meſure que le fer cru ſe met en fuſion, on l'avance, jusqu'à ce qu'il ſoit tout-à-fait fondu, ce qui ſe fait dans une ou $1\frac{1}{2}$ heures. La quantité de fer cru double, qu'il faut prendre pour une loupe, dépend de ſa qualité; s'il eſt de la qualité ordinaire, ſavoir compacte, partout blanc ſtrié, & peu troué, on y en met $4\frac{1}{2}$, au plus 5 pouds; s'il eſt moindre, il ne faut pas y mêttre au de là de 4 pouds, mais s'il eſt de très-bonne qualité, on peut pendre 5, $5\frac{1}{2}$ à 6 pouds.

Si le fer cru eſt tout-à-fait entré en fuſion, on augmente le feu autant que les ſouflets le comportent, & après environ une $\frac{1}{2}$ heure; on retire pour la premiere fois les ſcories, enſuite on y met ſelon la qualité du fer cru double $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ même quelquefois 2 pouds de morceaux detaches de la loupe du procedé precédant; (крохъ, fragmens de rebut) plus il eſt

eſt ſuſceptible de devenir acier, plus il abonde en parties, qui y ſont propres, moins il y en faut. Au commencement on jette 10 à 12 liv. de fragmens de rebut de la grandeur de noix, ou au plus de celle d'oeuf devant le touyau ſur les charbons pour les faire entrer en fuſion; ſi la fonte eſt faite, on la remue quelquefois; on cherche ſurtout à replacer vers le milieu & devant le touyau tout le métal, qui s'écarte trop loin vers le bord ou dans les coins. On netoye auſſi ſouvent avec un fer le touyau, s'il veut prendre des boſſes, & on obſerve, s'il n'y a pas trop de ſcories ſur la fonte. On reconnoit ceci en regardant par le touyau; ſi l'on remarque, qu'il écume fortement; en ce cas on les retire, puis on arrete les ſouflets, à fin que le métal prenne un peu de conſiſtance pendant environ un ¼ d'heure. On remet enſuite les ſouflets en mouvement, & on y ajoute une ou deux fois quelques livres de fragmens de rebut; (крохъ) ſi ceci eſt entré en fuſion, & que le métal ait été remué quelquefois, on voit après quelque tems par le touyau, où il commence à travailler fortement, ce qu'on appelle bouillir; (кипитъ) il faut ſuſpendre déréchef les ſouflets pour quelques minutes, où la maſſe commence à s'endurcir, ſi tout eſt allé duement. Ceci arrive quelquefois vite, mais ſeulement en partie; car il nage quaſi une forme de disque ſur le reſte du métal encore liquide. On l'ote; il eſt nommé piéce brulée (Brandſtück жюгъ) il eſt d'ordinaire de la qualité des loupes ordinaires, & produit de bon acier brut; (укладъ) mais ceci n'arrive pas ſouvent, & ſeulement alors, lorque le fer cru double n'eſt pas d'une qualité diſtinguée, & qu'on ait mis à la fonte trop de fragmens de rebut á la fois.

Communément il provient une loupe ſans Brandſtük. Ainſi ſi la fonte bout, & qu'elle commence à s'endurcir, il

n'arrive pas rarement, que quelques fragmens s'attachent au bord quelque part, où le vent ne peut pas aſſez opérer. Ceci doit en être oté avec une péle, & jeté avant le touyau ſur les Charbons, où il ſe fond déréchef, & s'unit à la loupe; durant ce tems on nettoye toujours le touyau, on attire les charbons devant lui, on releve de tems en tems la fonte, qui s'endurcit, on ſuſpend les ſouflets, ainſi on laiſſe le tems au métal à s'endurcir & à s'unir. On enleve auſſi les ſcories, ſelon le beſoin, & de maniere, qu'il n'en reſte ſur la loupe, qu'autant qu'il faut pour garantir le métal de brulure ſuperflue. Si le fer cru double eſt de très bonne qualité, ou ſi l'on a pris beaucoup des fragmens de rebut, ils ne ſe forment pas tant de ſcories à cauſe de la pureté plus grande du fer, & il y en a quelquefois ſi peu, que le feu conſume beaucoup de la maſſe. En ce cas on y ajoute quelques poignées de déchet de marteau, (eclats de marteau, треска) ou bien des ſcories, qu'on retire avec un fer du touyau. Ceci arrive auſſi, ſi le métal eſt ténace, & ſi la loupe s'eſt formé, c'eſt-à-dire: comprimée dans une maſſe dure, ce qu'on remarque en la remuant avec un fer; on y met encore quelques petites corbeilles de Charbons, (решетки) & on augmente le feu, pour qu'il pénétre la loupe, ſavoir pour expulſer d'autant plus par une chaleur violente les parcelles de ſcories y melées, & pour les faire paſſer en haut ſur la ſurface de la matiere liquide; ceci dure tout au plus une ½ heure; on ſuſpend alors les ſouflets, & on retire les charbons, on détache la loupe tout à l'entour avec un fer pointée, on l'éleve, la retire, & la jette ſur le fonds de la fabrique; alors l'ouvrier frappe avec un grand fléau de bois ſur la ſurface de la loupe, tant pour en reſerrer & comprimer les parties, que pour en faire ſortir les ſcories, qui s'y tiennent. Il y en a d'ordinaire fort peu, & moins les loupes en contiennent, plus elles

elles ſont riches en acier. La loupe eſt portée enſuite ſous le marteau, en eſt applatie, coupée à demi au milieu, & miſe ſur un coté. — Ces loupes ainſi préparées différent beaucoup en poids ici comme ailleurs; communément elles peſent 2, 2½, 3 & 3½ pouds, quelquefois auſſi, mais plus rarement 4 pouds & un peu plus; même il eſt arrivé quelquefois, qu'elles ont peſé 6 pouds. Souvent & ſurtout lorsque le fer cru double n'eſt pas aſſez purifié, ou qu'on y ait mis trop peu des fragmens de rebut, ou de moindre qualité, on n'obtient que des loupes d'1, 1¼ ou 1½ pouds, mais le plus ordinairement de 2 à 3 pouds. Si l'ouvrage réuſſit bien, une pareille loupe eſt achevée en 5 à 6 heures, ſouvent auſſi en 4 ou 4½ heures depuis le commencement du travail ſur le foyer jusqu'au tems de la retraite; mais ſi le fer cru double eſt de mauvaiſe qualité, & que l'on n'y mette pas aſſez des fragmens de rebut, ou que les ſouflets agiſſent foiblement à cauſe du manque d'eau, que les charbons ſoient vieux ou mauvais, que le tems ſoit humide & pluvieux, ou qu'il y ait quelque mepriſe, ils s'ecoulent même 7 jusqu'à 10 heures, & il arrive, qu'aucune loupe ne ſe forme.

Puisque le fer cru, tel qu'il vient du haut-four de Kamensk, eſt mauvais à cauſe de la mauvaiſe qualité de ſon minerais, & qu'on ne puiſſe le traiter, comme on traite dans les autres pays le fer, qui eſt ſuſceptible de devenir acier, il importe d'employer différens artifices & manipulations pour faire la loupe, ſi l'on veut voir le ſuccès de ſon travail, p. ex. on ne ſauroit préparer ici une bonne loupe ſans un fonds de ſable dans le Creuſet. J'eſſayois un fonds fait de charbons comprimés, mais les loupes devinrent ferrugineuſes. Le touyau dure d'ordinaire 8 jusqu'à quinze jours & ſouvent plus long tems, ſans avoir beſoin d'une réparation; mais s'il eſt élargi

élargi par le feu, la loupe ne réuſſit point ou difficillement. Le vent ſe diſſipe trop, & n'opère pas aſſez fortement. Quelquefois il arrive par la négligence du maitre, que le touyau gagne des boſſes, qu'il eſt obligé, de faire paſſer une barre de fer à coups de marteau, d'où vient d'ordinaire, que le touyau ſoit trop avancé dans le Creuſet, qu'il prenne de plus grandes boſſes, & qu'en général il en réſulte un mauvais ouvrage. Si par inadvertance on fait le lit de ſable trop bas ſous le touyau, le métal eſt trop abaiſſé, & n'eſt pas aſſez pénétré par le vent, qui paſſant vers le haut, produit beaucoup de ſcories & ſeulement de petites loupes, qui ſe forment lentement, & qui manquent quelquefois. Si le ſable n'eſt pas aſſez fortement comprimé, ou que l'on y met peu d'eclats de marteau, (Hammerſchlag) le métal pénétre & paſſe à travers, s'abaiſſe trop en même tems & cauſe l'inconvénient nommé. Si l'on laiſſe trop de ſcories ſur la fonte, la loupe devient molle & ferrugineuſe, & s'il y a trop peu de ſcories, le feu conſume trop de métal, & il y a un grand déchet. Si le maitre n'eſt pas aſſez attentif de tenir le touyau propre, le vent ne pénétre pas aſſez les charbons & le métal, qui ſe refroidit dans ſes extrémités, & forme un demicercle de métal à demi-acier, qui ſe détache de la loupe, lorsque on la leve, qu'il ne ſe laiſſe ſouder, & qu'il faut employer en guiſe de fragmens de rebut (Brockwerk). Ceci arrive auſſi, ſi les ſouflets n'agiſſent pas aſſez fortement, & qu'ils s'arrétent à cauſe du manque d'eau. Si le maitre ne remue pas aſſez la fonte, ou qu'il ne la pouſſe pas du bord au milieu, ou que le fer cru double ſoit fort *cru* ou aigre, il attaque facilement la plaque, qui eſt ſous le touyau, ou même une autre plaque de fer de fonte, dont le Creuſet eſt pourvu, l'attaque & la ronge, & le métal paſſe par elle. En ce cas la maſſe dans le Creuſet eſt travaillé trop foiblement

&

& eſt trop baſſe; il s'en ſuit ce qui arrive, lorsque le lit de ſable eſt trop bas.

Si une loupe d'ici eſt achévée & prête à être retirée, pluſieurs matières ſe trouvent dans le Creuſet; au deſſus il y a les ſcories, ſous celles-ci la loupe ou la Krütze, ſous la loupe le fonds (Boden, подьденникъ) & ſous lui le lit de ſable; celui-ci apparoit d'ordinaire, lorsqu'il eſt retiré comme un plat pierreux à demi fondu. Si l'on a retiré la loupe, les ſcories, qui reſtent après l'avoir otée, ſont laiſſées jusqu'à ce qu'elles ſe ſoient refroidies, enſuite on les ôte peu-à-peu avec une pêle inclinée, puis on verſe de l'eau dans le creuſet & on en retire la maſſe métallique, qui eſt ſous la loupe, ou le fonds avec le gateau de ſable y attaché. Ce fonds, duquel la loupe s'eſt ſéparé en forme d'un disque épais de 1 à 2 Verſchoks, eſt un melange de fer aigre presque tout cru, troué dans ſes fractures, ſpécifiquement plus peſant que la loupe, qui pour cette raiſon descend au deſſous d'elle, & qui ſe ſépare de la loupe comme un métal, qui n'eſt pas converti en acier parfait. Ces fonds ſont employés déréchef ſous le nom des fragmens de rebut (Крохъ) à faire la loupe, car ſans eux on ne ſauroit produire aucune loupe, ou très-difficilement & avec dépenſe de beaucoup de charbons & de tems. Si l'on a pris pour une loupe environ $4\frac{1}{2}$ pouds de bon fer cru double, & 1 à $1\frac{1}{2}$ pouds de fragmens, & que l'ouvrage ait bien réuſſi, il en provient d'ordinaire une loupe de $2\frac{3}{4}$, 3 à $3\frac{1}{2}$ pouds, & un fonds de 1 ou $1\frac{1}{2}$ pouds; plus la loupe eſt grande, plus le fonds eſt petit, & ainſi réciproquement. De toute la maſſe du métal il y a un $\frac{1}{3}$ à $\frac{2}{5}$, qui eſt conſumé par le feu. Mais ſi le travail n'a pas eu une bonne réuſſite, ils en proviennent des loupes moindres & des fonds d'autant plus grands; au contraire quelquefois, s'il réuſſit bien, (mais ceci arrive rare-

 ment,

ment, & contre gré, parceque les fragmens manquent alors à la loupe ſuivante) tout le métal ſe retire dans la loupe, & ne forme pas de fonds; ce n'eſt que ſur le lit de ſable, que quelques ſcories ſe dépoſent.

Les loupes retirées ſe rompent facilement, ſurtout au milieu, où elles ſont à demi-coupées, quoiqu'elles ne ſoient pas trempées, & qu'on les lime facilement; mais ceci n'a pas lieu, ſi elles ſont ferrugineuſes. Dans leurs fractures elles ſont grainées & quaſi criſtalliſées, ayant des foſſetes & des bourſouflures en quelques endroits, & étant de veritable acier. Celles, qui ne le ſont pas, ou pas en entier, ne le deviennent pas non plus, ni en les chauſant ni en forgeant, mais reſtent ferrugineuſes. C'eſt pourquoi, pour faire cet acier, le plus grand art conſiſte dans la préparation de bonnes loupes ou Krützes contenant l'acier. Au milieu, où l'on coupe à demi les loupes, elles ont un grain fin dans la fracture, comme de bon acier cru, ce qui ſert de preuve, que le grain fin de l'acier provienne ſimplement de la compreſſion opérée par le marteau; plus ſes coups ſont fréquens, & plus la barre eſt *amincie*, plus le grain devient fin. —— Dans leurs fractures les fonds différent d'ordinaire des loupes, réſiſtent à la lime, & ſont même un peu mous ſous le marteau, quoiqu'ils ne ſe pretent pas à la ſoudure; ſont caſſants à chaud, & ſe détruiſent, c'eſt-à-dire ils éclatent ſous le marteau; ils ſont dans la fracture plus troués que les loupes, ils montrent cà & là de petites étoiles de fer cru, & ſont quelquefois aſſez compactes, blancs, ſtriés & très-aigres, ils ne ſont par conſéquent qu'un fer cru triple, c'eſt-à-dire rafiné deux fois; moins ces fonds ſont ſemblables à du fer cru (Чугуновато) d'autant ils ſont meilleurs, & moins il eſt neceſſaire d'en ajouter à la loupe, la quelle ſe forme auſſi plus vite, & devient plus

plus grande; mais s'ils ſont de cette mauvaiſe qualité, ils ſont d'autant plus nuiſibles, plus on en prend; il n'en réſulte aucune loupe que difficilement, & quelquefois point de tout.

Mais pour préparer l'acier brut (Укладъ) de la loupe ou de la Krütze, on la briſe en deux, quelquefois, ſi elle eſt grande, en 3 morceaux, & ſi le fer cru eſt entré en fuſion on la poſe dans les charbons ſur le foyer, & on l'approche peu-à-peu du touyau; on la tourne quelquefois, & on la chauſe ainſi entièrement. Si un tel morceau eſt tout rouge, il eſt battu, & plié en deux par les coups de marteau de main, parcequ'il eſt ordinairement aſſez large, & mince proportionnellement, enſuite il eſt comprimé fortement ſous le grand marteau & remis devant le touyau. S'il commence à rougir plus clairement, on y jette de tems en tems du ſable, on le tourne, & ainſi on en chauſe une extrémité jusqu'à la blancheur de lune, où il ſoude alors fortement. Durant ce tems on le porte quelquefois ſur l'enclume, & on bat avec les marteaux de main les angles ſaillans, ou les parties, qui ſont prêtes à ſe détacher, afin que la maſſe prenne une forme; on le remet enſuite au feu, on y jette du ſable & on le bat déréchef jusqu'à ce qu'il change ſa couleur blanche en rouge; puis on le porte ſous le marteau, & on le bat dans un bout ſelon la forme d'une pièce quarrée oblongue; (Maſſel, Куссокъ) on la remet au feu, & la chauſe de nouveau jusqu'à ce qu'elle ſue; on le tourne quelquefois dans le ſable, on le bat, on le remet ſous le marteau, & on en forge ſeulement ce bout, qui devient une large barre quarrée. De la même manière on traite l'autre bout, & toutes les autres parties de la loupe. Une barre d'acier brut ainſi forgée, large d'$1\frac{1}{4}$ verſchock & épais d'un $\frac{1}{2}$ verſchock, eſt rougie enſuite, trempée dans l'eau froide, briſée & tirée ſelon ſa bonté. Cet acier brut d'ici eſt

d'ordinaire d'un beau grain fin, ayant ſouvent une roſette (Roſe, гнездо) dans la fracture, très-dur & facile à travailler. Mais toutes les barres ne ſont pas d'une bonté égale; quelques-unes en ſont d'un grain plus gros, (mais ceci eſt cauſé quelquefois par un trop grand dégré d'incandeſcence en égard à la trempe, ce qui cependant ne déroge pas à la bonté) d'autres ont des feuilles minces de fer, & quelques-unes ſont criſtalliſées presque en écailles, & blanches dans la fracture, ce que nous nommons ſemblable à du fer cru; (чугуноватой) de là ils proviennent deux ſortes de cet acier brut: la meilleure & la moyenne. Il arrive mainte fois, qu'une piece d'acier brut (Maſſel) ne ſe prête pas, pour être forgée, jusqu'à ce qu'elle ſue; elle ſe détruit parcequ'elle eſt encore un peu crue ou auſſi trop chaude; en ce cas on la pouſſe ardente jusqu'à la blancheur dans l'eau, & on la chauſe & forge de nouveau. En 4 à 6 heures un maitre peut ſur un foyer d'un Creuſet avec un ſeul ouvrier achever 3 à 4, & en 12 heures, ſi l'on chauſe & forge toute la journee, 6 à 7 pouds; mais communément un maitre forge journellement (la préparation de la loupe y compriſe) 2 pouds & le meilleur maitre $2\frac{1}{4}$ à $2\frac{1}{2}$ pouds; ainſi journellement ſur un foyer d'un creuſet 4, $4\frac{1}{2}$ à 5 pouds. Le meilleur maitre acheve par mois dans environ 22 à 24 jours ouvriers 50 à 60 pouds d'acier brut, ainſi deux maitres en jour & nuit (въ сутки) dans un creuſet par mois 100 pouds & au de là, dans l'année entière 1200 à 1300 pouds, ſi l'on travaille ſans interruption. Le déchet eu égard au poids de la loupe eſt d'ordinaire $\frac{1}{5}$ ou auſſi $\frac{1}{4}$, quelquefois ſeulement $\frac{1}{7}$. Ceci dépend en partie des ſoins & de la vigilance du maitre, en partie auſſi de la bonté de la loupe, ſi elle ſe chauſe plus ou moins facilement. En général tout l'art de fabriquer l'acier de fonte dépend de la manière de préparer l'acier brut de la loupe, & celle-ci du fer cru. Dez que l'on

l'on a de bon acier brut, il eſt aiſé de faire auſſi de bon acier rafiné, & même de telle qualité, que l'on deſire; on n'a qu'à le rafiner plus ou moins, c'eſt-à-dire, plus on le plie & l'étend ſouvent, d'autant il devient meilleur; toutefois ceci a ſes limites, & ne peut guere ſe faire plus de 3 ou 4 fois, ſans cette précaution l'acier devient trop mou.

Pour rafiner cet acier brut, on en ſaiſit avec des tenailles 7 ou 8 pièces des barres briſées de longueur & d'épaiſſeur à peu près égale; on met parmi elles de petits morceaux d'acier minces, & ce faiſceau (складка, Perbe) peſant $2\frac{1}{4}$ à $2\frac{1}{2}$ même 3 pouds eſt porté ſur le foyer d'acier, & chaufé jusqu'à l'incandescence; on y jette de tems en tems du ſable, on le bat & enfin on le met ſous le marteau, il eſt comprimé, étendu, & chaufé déréchef; on y jette encore du ſable, & il eſt forgé alors ſous le marteau en forme d'une barre quarrée épaiſſe d'environ 1 Verſchok, puis on en coupe des pieces longues d'environ 1 pié; alors on tourne le faiſceau (die Gerbe) & l'autre bout eſt traité de même que le premier. De cette manière le faiſceau eſt coupé en 4 ou 5 petits blocs; (куски) ceux-ci ſont chaufés l'un après l'autre, on les roule dans le ſable à diverſes repriſes, on les bat & étend en barres, larges d'environ $\frac{3}{4}$ verſchoks, & épaiſſes d'un $\frac{1}{4}$; puis on les trempe rouges ardentes, (rouge de ceriſe) ce qui ſe fait ſimplement dans l'eau pure & froide; on les briſe & on les *trie* en deux ſortes, comme l'acier brut. Le déchet (угаръ) eu égard au poids de l'acier brut eſt d'ordinaire $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{4}$, tantôt plus, tantôt moins. C'eſt de l'acier rafiné une fois; ſi l'on le veut plus fin, on plie le faiſceau encore une ou deux fois, où le déchet eſt environ $\frac{1}{3}$.

La bonté de l'acier brut auſſi bien que du rafiné eſt principalement reconnue par la fracture; plus il eſt finement

 grai-

grainé, ſerré & égal, & moins il eſt ferrugineux d'autant il eſt meilleur. Le meilleur acier brut a ordinairement une roſette, quoiqu'il y ait une quantité de barres, qui ſoient parfaitement pures & finement grainées, & qui n'ont point la roſe; maint acier brut eſt trempé trop chaud par inadvertance, & montre dans la fracture un grain blanc, gros & anguleux, ce qui n'altere point ſa bonté, & il peut être rafiné comme le meilleur acier brut fin grainé, pourvu qu'au commencement il ne ſoit pas trop chauſé; mais tout l'acier brut, ainſi que les barres d'acier rafiné qui ont dans la fracture des feuilles minces de fer, ou des couches & ſtries blanches, luiſantes comme de l'argent, & feuilletées, ſont triées en une ſorte moyenne. Le bon acier brut eſt reconnu en quelque façon avant la fracture, en partie lorsqu'il produit un ſon clair, & en partie, ſi les barres trempées éclatent intérieurement durant la trempe, ou durant un $\frac{1}{4}$ d'heure après, ce qui ſe fait avec un ſon clair & agréable, comme ſi l'on frapoit avec un petit inſtrument ſur un verre ou une clochette; mais l'acier rafiné & plié (складешная сталь) ne montre jamais cet effet, quoiqu'il s'éclate avec un ſon clair, ſi l'on le romp. Il arrive ſouvent, que cet acier ſoit trempé, lorsqu'il eſt trop blanc, ardant c'eſt-à-dire trop chaud, (ſurtout à la lueur claire du ſoleil, où les barres paroiſſent d'ordinaire plus rouges, & ainſi plus froides, qu'elles ne ſont en effet) & alors il montre une fracture blanche & luiſante comme de l'argent, laquelle eſt quelquefois d'un grain aſſez gros. Ceci ne lui nuit point, pourvû qu'il ſoit d'ailleurs bon; car dez qu'une telle barre eſt reforgée & trempée au dégré convenable, elle montre auſſi une fracture d'un beau gris obſcur & d'un grain fin.

L'acier brut de Pyſchminsk eſt très-dur, & s'il eſt ſans melange ferrugineux, (ce qu'on ne ſauroit quelquefois éviter

ter dans aucune fabrique d'acier, parcequ'on ne peut pas traiter au feu le fer & l'acier comme les autres métaux, p. ex. l'or, l'argent, le cuivre, auxquels on donne ſimplement le plus haut dégré de chaleur, pour les porter à la plus parfaite pureté) il ſe romp facilement, de manière, que maintes barres ſe caſſent, en les jettant contre un corps dur, & il faut prendre ceci pour un bon ſigne; mais il y en a auſſi, qui ont été trempées trop rouge obſcur, ou dans l'eau trop peu froide, & qui ſont d'ailleurs très-compactes, elles ſe caſſent mainte fois difficilement, quoiqu'elles ſoient en effet bonnes & belles. Au contraire l'acier rafiné ne ſe caſſe pas ſitôt, & c'eſt une marque de ſa conſiſtance, & de ſa tenacité; plus il eſt compacte & fin, il ſe romp avec un ſon d'autant plus clair; cet acier peut être employé à quantité d'inſtrumens, mais il eſt le plus propre à des reſſorts, à des lames, à des ſabres & à des outils trenchans. —— Depuis 1786-1789 on a fait à la fabrique de Pyſchminsk vers 10,000 pouds de cet acier, dont la plupart a été livrée & employée à la fabrique d'armes à Toula.

Pour montrer en quelque manière la différence entre la façon de faire l'acier uſitée jusqu'ici dans l'Empire Ruſſe & ma méthode, je ne citerai que quelques extraits de comptes, que j'ai à la main, que p. ex. depuis le mois de Mai jusqu'au Septembre 1786, 10 Maitres ont tiré de 3200 pouds de fer cru ordinaire 1345 pouds 15 liv. d'acier brut, y ayant conſumé 739$\frac{2}{7}$ corbeilles de charbons; ainſi 100 pouds de fer cru donnerent environ 42 pouds d'acier brut; dans le même tems 6 maitres ont obtenu de 1376 pouds 28 liv. d'acier brut 1147 pouds 15 liv. d'acier rafiné, y ayant employé 228$\frac{2}{3}$ corbeilles de charbons; ainſi 100 pouds d'acier brut donnerent 83 pouds d'acier rafiné, & 100 pouds de fer cru produiſirent presque

35

35 pouds de cet acier rafiné; pour avoir 100 pouds d'acier brut, il y faloit 55, & pour 100 pouds d'acier rafiné, ſeulement 19 corbeilles de charbons.

Dans la ſuite ce travail, & ſurtout la bonté de l'acier a été ſenſiblement perfectionnée; dans des établiſſemens pareils il ne peut être autrement, que peu-à-peu & par dégrés ils parviennent à leur perfection, car au Janvier 1789, 4 Maitres ſur un foyer de deux creuſets (il n'y en avoit pas d'avantage d'employés à cauſe du manque d'eau) firent de 490 pouds de fer cru ordinaire 216 pouds 13 liv. d'acier brut, en y employant 130 corbeilles de charbons; ainſi 100 pouds de fer cru donnerent déjà 47 pouds d'acier brut, & pour obtenir 100 pouds d'acier brut (quoiqu'à cauſe du manque d'eau la dépenſe de charbons fut proportionellement plus grande) il n'y faloit qu'environ 60 corbeilles de charbons. Mais un des meilleurs Maitres dans le mois de Juin jusqu'au Novembre 1788, en 175 jours ouvriers, ſavoir en 1380 heures, tira de 530 pouds de fer cru ordinaire 257 pouds d'acier brut & y employa $157\frac{1}{2}$ corbeilles de charbons; ainſi 100 pouds de fer cru produiſirent 48 pouds d'acier brut, & pour obtenir 100 pouds d'acier cru il y faloit auſſi 60 corbeilles de charbons. Dans la même année 2295 pouds d'acier brut fournirent 1875 pouds 9 liv. d'acier rafiné (Gerbſtahl) & on y conſuma $430\frac{1}{3}$ corbeilles de charbons. Ainſi 100 pouds d'acier brut fournirent 80 pouds d'acier rafiné, & pour obtenir 100 pouds de ce dernier, il y faloit 22 corbeilles de charbons; ainſi 100 pouds de fer cru livrèrent presque 38 pouds d'acier rafiné; toutes ces dépenſes peuvent être vérifiées par des documens authentiques.

Il eſt évident par là, que la différence en eſt frappante, & combien ma méthode ſoit plus avantageuſe:

car de 100 pouds de fer en barres vieux ou nouveau (dont l'un coute pour le moins 40 à 50, & l'autre 70 à 80 copics) proviennent ſelon l'ancienne méthode - - - - 52 pouds d'acier brut.

Selon ma manière de 100 pouds de fer cru (qui coute 20 ou au plus 25 Copics) viennent - - - - 47 à 48 —— ——

Pour 100 pouds d'acier cru il faut des charbons ſelon l'ancienne méthode - - 91 corbeilles.

Selon la mienne - - - - 60 —— ——

De 100 pouds d'acier brut on obtient du rafiné:

Selon l'ancienne méthode - - - - 70 pouds.

Selon la mienne 80, ou ſi l'on veut le rafiner davantage, auſſi environ - - - 70 ——

Pour produire 100 pouds d'acier rafiné il y faut des charbons:

Selon l'ancienne méthode - - - 60 corbeilles.

Selon la mienne 22, ou ſi l'on pouſſe le rafinage plus loin, environ - - - 30 ——

100 pouds de fer vieux ou nouveau fourniſſent ſelon l'ancienne méthode de l'acier 2 fois rafiné 36 pouds

100 pouds de fer cru ordinaire en fourniſſent ſelon la mienne - - - - 35 à 38 pouds

ou ſi l'on pouſſe le rafinage plus loin, on retire de 100 pouds de fer cru environ $\frac{1}{3}$ ou 33 pouds d'acier fin, dont le poud vient ſur les lieux environ à $2\frac{1}{2}$ jusqu'à 3 roubles, ſi les matériaux ſont au prix ordinaire.

Selon l'ancienne manière un Maitre ne peut livrer ſur un foyer d'un creuſet dans une année de 250 jours ouvriers (chacun de 12 heures) plus d'acier brut, que - - 350 à 375 pouds

Mais ſelon la mienne - - - - 500 à 560 ——

Car dans 175 jours un Maitre livra 257 pouds, comme il a été dit cy-deſſus.

La qualité de cet acier préparé de fer cru eſt à l'égard de celui du fer vieux & nouveau (ſuppoſé que le rafinage ſoit le même) meilleur dans la plupârt des barres. Ainſi cette nouvelle manière de faire l'acier mérite ſur l'ancienne méthode la préférance, non ſeulement parceque d'un matérial à beaucoup meilleur marché, ſavoir de fer cru, on peut obtenir (ſous les mêmes circonſtances) presqu'autant d'acier, mais auſſi presque dans le même tems on peut en fabriquer plus d'un tiers davantage, & qu'en outre on peut y épargner plus d'un tiers de charbons. Au reſte ſelon ma méthode on obtient une quantité d'acier de la meilleure ſorte beaucoup plus grande, que celle, qui provient ſelon l'ancienne manière, où la plûpart n'eſt que de la ſorte moyenne, & une partie très-mauvaiſe.

Quant à la bonté de l'acier de Pyſchminsk à l'égard de l'étranger, il a à peu près les qualités de celui de Scharſac-Stahl en Stirie, ou du Guerbſtahl de Schmalcalde, de Naſſau & d'Angleterre, de celui de la Suede preparé par cémentation & par rafinage. Il eſt ainſi meilleur que l'acier de fonte de la Suede, & que celui de Stirie, qu'on appelle Breſcianer-Stahl. Le poud de ces ſortes d'acier vaut à preſent à S. Petersbourg 4 à 8 Roubles, & de celles-là 10, 15 jusqu'à 20 Roubles. Dans la ſuite du tems & par de meilleurs minéraux j'eſpére de parvenir à fournir auſſi un tel acier, qui qui ne doit céder en rien aux meilleures ſortes d'acier étranger.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

PROBLEMATA DVO ASTRONOMICA.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. die 7 Ian. 1790.

§. 1.

Accuratam lineae Meridianae determinationem rem eſſe non minoris momenti ac difficultatis atque laboris, practicis Aſtronomis eſt notiſſimum. Quum praeterea omnes methodi vulgares aſtrorum altitudinibus nitantur, quae non niſi eximiorum inſtrumentorum ope exacte capi poſſunt; nemini, qui inſigni pretio eiusmodi inſtrumenta ſibi parare nequit, hisce methodis uti licet; ut de aliis incommodis taceam, quibus altitudinum obſervationes ſubiectae ſunt, & de quibus infra plura dicam. Sunt quidem et aliae methodi uſui communi magis accommodatae, velut gnomon eiusque generis alia; verum ne dicam, vel has etiam apparatum requirere haud exiguum, tamen non minus ob umbrae vel puncti luminoſi limitum incertitudinem, quam ob ſolis declinationem tempore inter binas obſervationes elapſo mutatam, exactitudo inde ſperari nequit, etiamſi tempus ſolſtitii eligatur. Quinimo haec ipſa temporis circumſcriptio plurimis caſibus iſtam methodum prorſus reddit inutilem. Methodum itaque quaerenti, qua, *nullis praeter horologium inſtrumentis inſtructus, ſine altitudinum obſervatione, quo-*

vis tempore lineam meridianam invenire poſſis, mox quidem talis ſeſe mihi obtulit methodus; eadem autem ad calculum perduxit tam prolixum ac fere tedioſum, ut e generali Problematis huius ſolutione haud multum lucri ſit ſperandum. Quum tamen caſibus ſpecialioribus ſolutio reſultet multo ſimplicior, quum praeterea haec disquiſitio ob alias rationes notatu non videatur indigna, et, ſi quis calculum prolixum non timeat, ob modum obſervandi ſimpliciſſimum nonnumquam utilis eſſe poſſit, publico examini eam ſubiicere auſus ſum.

§. 2. Problema, de quo hic agitur, ſic poteſt enunciari: *Obſervatis binis differentiis angulorum azimuthalium et horariorum, invenire ipſum Azimuth vel angulum horarium.* Supponitur itaque, eandem ſtellam ter fuiſſe obſervatam, atque cum angulos azimuthales tum tempora inter binas obſervationes elapſa ſimul fuiſſe notata; quod quidem prius ope duorum filorum, alterius fixi, alterius mobilis, ſatis exacte effici poteſt, dummodo filum mobile circa filum fixum tanquam axem moveatur in ſuperficie cylindri verticalis, cuius radius ſatis magnus. Initio ſtatim notaſſe iuvabit, non ſolum ſideris declinationem, verum etiam binos angulos azimuthales vel horarios ab arbitrio noſtro pendere, unde iſtae quantitates ita poterint determinari, ut formulae reddantur ſimpliciores, quemadmodum infra videbimus. Ipſum itaque Problema aggrediamur.

Tab. VIII. Fig. 1. §. 3. Moveatur ſtella in Parallelo A C M, ſitque ter obſervata in A, B, C; Zenith ſit in Z, polus in P, unde ex obſervationibus filorum innoteſcunt anguli $AZB = \mu$, $AZC = \nu$, et e temporibus interlapſis anguli $APB = \alpha$, et $APC = \beta$. Poſito iam $PZ = \varepsilon$, $PA = PB = PC = \delta$, $APM = \Phi$, $AZM = \psi$, perinde eſt, ſive angulus Φ quaeratur ſiue ψ, quum unus ex altero ſine ambagibus eruatur,

tur, et Meridiani P Z M ſitus per utrumque aeque determinetur. Praeſtat tamen, angulum A Z M ideoque Meridianum immediate determinare, quam ope horologii momentum culminationis obſervare. Habemus iam in triangulo A P Z,

$$\text{tang. } PZA = \frac{\text{tang. } PA \text{ ſin. } APZ}{\text{ſin. } PZ - \text{tang. } PA \text{ coſ. } PZ \text{ coſ. } APZ},$$

ſeu

$$\text{tang. } \psi = \frac{\text{tang. } \delta \text{ ſin. } \Phi}{\text{tang. } \delta \text{ coſ. } \varepsilon \text{ coſ. } \Phi - \text{ſin. } \varepsilon}.$$

Eodem modo, patet in triangulo B P Z, ſubſtitutis $BPZ = \Phi - \alpha$ loco Φ, et $BZM = \psi - \mu$ loco ψ, fore

$$\text{tang. } (\psi - \mu) = \frac{\text{tang. } \delta \text{ ſin. } (\Phi - \alpha)}{\text{tang. } \delta \text{ coſ. } \varepsilon \text{ coſ. } (\Phi - \alpha) - \text{ſin. } \varepsilon},$$

et in triangulo C P Z, ubi loco μ poni debet ν, et β loco α,

$$\text{tang. } (\psi - \nu) = \frac{\text{tang. } \delta \text{ ſin. } (\Phi - \beta)}{\text{tang. } \delta \text{ coſ. } \varepsilon \text{ coſ. } (\Phi - \beta) - \text{ſin. } \varepsilon}.$$

§. 4. Si ex his tribus aequationibus angulum Φ vel ψ eliminare vellemus, ad aequationem perveniremus tertii gradus valde complicatam, quare antea caſus quosdam ſpeciales aſſumere praeſtabit, qui arbitrio noſtro ſunt relicti. Ponamus itaque primum $\delta = 90°$, ut aequationes noſtrae abeant in ſequentes: $\text{tang. } \psi = \frac{\text{ſin. } \Phi}{\text{coſ. } \varepsilon \text{ coſ. } \Phi}$, ob $\text{tang. } \delta = \infty$, ſeu

$$\text{tang. } \Phi = \text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \psi;$$

$$\text{tang. } (\Phi - \alpha) = \text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } (\psi - \mu); \text{ et}$$

$$\text{tang. } (\Phi - \beta) = \text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } (\psi - \nu).$$

E binis prioribus fit

$$\frac{\text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \psi - \text{tang. } \alpha}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \psi} = \frac{\text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \psi - \text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \mu}{1 + \text{tang. } \mu \text{ tang. } \psi}, \text{ unde reperitur}$$

$$\text{coſ. } \varepsilon \text{ tang}^2 \psi \, (\text{tang. } \mu - \text{tang. } \alpha \text{ coſ. } \varepsilon)$$
$$- \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \mu \text{ tang. } \psi \, (1 - \text{coſ}^2 \varepsilon)$$
$$+ \text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \mu - \text{tang. } \alpha = 0, \text{ ſive}$$

$$\text{coſ. } \varepsilon \text{ tang}^2 \psi = \frac{\text{tang. } \alpha \text{ ſin}^2 \varepsilon \text{ tang. } \mu \text{ tang. } \psi + \text{tang. } \alpha - \text{coſ. } \varepsilon \text{ tang. } \mu}{\text{tang. } \mu - \text{tang. } \alpha \text{ coſ. } \varepsilon}.$$

Quum

Quum ſecunda ex aequationibus fundamentalibus abeat in tertiam, ſi β ſubſtituatur loco α et ν loco μ, eodem prorſus modo habebimus

$$\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{tang}^2\,\psi = \frac{\text{tang.}\,\beta\,\text{ſin}^2.\,\varepsilon\,\text{tang.}\,\nu\,\text{tang.}\,\psi + \text{tang.}\,\beta - \text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,\nu}{\text{tang.}\,\nu - \text{tang.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\varepsilon};$$

quo valore priori aequato nanciſcimur

$$\begin{aligned}\text{tang.}\,\psi\,[&\text{ſin}^2\,\varepsilon\,\text{tang.}\,\mu\,\text{tang.}\,\nu\,(\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha)\\ &- \text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\beta\,\text{ſin}^2\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,(\text{tang.}\,\nu - \text{tang.}\,\mu)]\\ &+ (1 - \text{coſ}^2\varepsilon)(\text{tang.}\,\beta\,\text{tang.}\,\mu - \text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\nu) = 0,\ \text{h. e.}\end{aligned}$$

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\nu - \text{tang.}\,\beta\,\text{tang.}\,\mu}{\text{tang.}\,\mu\,\text{tang.}\,\nu(\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha) - \text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\varepsilon(\text{tang.}\,\nu - \text{tang.}\,\mu)},$$

ſeu dividendo per tang. α tang. β tang. μ tang. ν,

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\text{cot.}\,\beta\,\text{cot.}\,\mu - \text{cot.}\,\alpha\,\text{cot.}\,\nu}{\text{cot.}\,\alpha - \text{cot.}\,\beta - \text{coſ.}\,\varepsilon\,(\text{cot.}\,\mu - \text{cot.}\,\nu)}.$$

Sic invento angulo ψ ſtatim quoque habetur Φ per aequationem, tang. Φ = coſ. ε tang. ψ.

§. 5. Ad hunc itaque caſum revocari nequeunt niſi ſtellae in ipſo Aequatore exiſtentes, aut ſaltem non ultra aliquot minuta prima ab eo diſtantes. Quum autem tam parum ab Aequatore diſtantes nullae deprehendantur fixae notabiliores, quum praeterea ſol atque luna propter declinationis variationem ex huiusmodi obſervationibus excludantur, haec formula duntaxat uſum habere poteſt in obſervandis planetis, dum Aequatorem tranſeunt. Verum et hic quoque, quia planetarum declinatio quamvis lento gradu mutetur, neceſſe erit, tempora intermedia ſeu angulos α et β valde parvos aſſumere. Quum praeterea plerisque caſibus lineae meridianae ſitus propemodum ſit cognitus, aut praevia ſaltem operatione ſine ingente errore determinari facile poſſit, in poteſtate noſtra erit, obſervationes ſibi invicem non minus quam ipſi Meridiano tam propinquam inſtituere, ut

ut non ſolum anguli α, β, ſed angulus quoque Φ valde fiat exiguus. Idem adhuc melius ſuccedet, ſi obſervationes pluries repetantur, ſicque Meridiani ſitus ſucceſſive exactius definiatur. Quibus conceſſis, calculus perducit ad aequationem ſimplicem, quamcunque demum habeat declinationem ſtella obſervata. Quare operae pretium videtur, eum caſum conſiderare, ubi anguli α, β, Φ, minimi ſunt.

§. 6. Poſito itaque ſin. $\alpha = \alpha$, coſ. $\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, et ſic pro ceteris, aequationes noſtrae fundamentales (§. 3.) erunt:

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\Phi}{\text{coſ.}\,\varepsilon - \text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon - \frac{1}{2}\Phi^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon},$$

cuius loco ſcribamus tang. $\psi = \frac{\Phi}{m}$, ut fiat

$$\text{tang.}\,(\psi - \mu) = \frac{\Phi - m\,\text{tang.}\,\mu}{m + \Phi\,\text{tang.}\,\mu}.$$

Ex altera igitur aequatione habemus

$$\frac{\Phi - m\,\text{tang.}\,\mu}{m + \Phi\,\text{tang.}\,\mu} = \frac{\Phi - \alpha}{\text{coſ.}\,\varepsilon - \text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon - \frac{1}{2}\Phi^2\text{coſ.}\,\varepsilon + \alpha\Phi\,\text{coſ.}\,\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha^2\text{coſ.}\,\varepsilon}$$

$$= \frac{\Phi - \alpha}{m + \alpha\Phi\,\text{coſ.}\,\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon};$$

unde fit

$$\Phi^2(\text{tang.}\,\mu - \alpha\,\text{coſ.}\,\varepsilon) - \alpha\Phi(\text{tang.}\,\mu - m\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\varepsilon)$$
$$+ m(m\,\text{tang.}\,\mu - \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{tang.}\,\mu) = 0.$$

In qua aequatione ulterius evoluta ſi termini, in quibus Φ et α ad quartum gradum aſcendunt, negligantur, quod quidem iam factum erat ponendo coſ. $\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, prodibit haec aequatio ſecundi gradus:

$$\Phi(\Phi - \alpha)(\text{ſin}^2\varepsilon + \text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\mu)$$
$$-(\text{coſ.}\,\varepsilon - \text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon)(\tfrac{1}{2}\alpha^2\text{coſ.}\,\varepsilon + \alpha\,\text{cot.}\,\mu - \text{coſ.}\,\varepsilon + \text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon) = 0.$$

Ponamus

$$\text{ſin.}\,\varepsilon(\text{ſin.}\,\varepsilon+\text{cot.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\varepsilon)=A,\quad \text{coſ.}\,\varepsilon-\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon=B,$$

ac tribuamus aequationi hanc formam:

$$\frac{\Phi(\Phi-\alpha)}{B}=\frac{\frac{1}{2}\alpha^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon+\alpha\,\text{cot.}\,\mu-B}{A-\frac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\mu};$$

tum ſi loco α et μ ſubſtituamus β et ν, ſimili modo erit

$$\frac{\Phi(\Phi-\beta)}{B}=\frac{\frac{1}{2}\beta^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon+\beta\,\text{cot.}\,\nu-B}{A-\frac{1}{2}\beta\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\nu}.$$

Quodſi iam poſterior a priore ſubtrahatur, reſultabit haec aequatio ſimplex:

$$\frac{\Phi(\beta-\alpha)}{\text{coſ.}\,\varepsilon-\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon}=\frac{\frac{1}{2}\alpha^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon+\alpha\,\text{cot.}\,\mu-\text{coſ.}\,\varepsilon+\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon}{\text{ſin}^2\,\varepsilon+\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\mu}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\beta^2\,\text{coſ.}\,\varepsilon+\beta\,\text{cot.}\,\nu-\text{coſ.}\,\varepsilon+\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon}{\text{ſin}^2\,\varepsilon+\text{cot.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\varepsilon\,\text{coſ.}\,\varepsilon-\frac{1}{2}\beta\,\text{coſ.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\nu}.$$

Haec aequatio calculo magis accommodari poteſt, ſi notetur, caſu, quo anguli μ et ν etiam valde parvi ſunt, quantitatum $\alpha\,\text{cot.}\,\mu$ et $\beta\,\text{cot.}\,\nu$ differentiam perquam fore exiguam. Proinde ſi in Denominatore partis ſecundae ſubſtituatur $\alpha\,\text{cot.}\,\mu$ loco $\beta\,\text{cot.}\,\nu$, habebimus

$$\frac{\Phi(\beta-\alpha)}{\text{cot.}\,\varepsilon-\text{cot.}\,\delta}=\frac{\alpha\,\text{cot.}\,\mu-\beta\,\text{cot.}\,\nu-\frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\varepsilon(\beta^2-\alpha^2)}{\text{ſin.}\,\varepsilon+\text{cot.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\,\text{cot.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\mu};$$

ubi, quum utramque quantitatem $\alpha\,\text{cot.}\,\mu$ et $\beta\,\text{cot.}\,\nu$ in Numeratore tamen computare oporteat, poteſt in Denominatore loco $\frac{1}{2}\alpha\,\text{cot.}\,\varepsilon\,\text{cot.}\,\mu$ ſubſtitui $\frac{1}{4}\text{cot.}\,\varepsilon(\alpha\,\text{cot.}\,\mu+\beta\,\text{cot.}\,\nu)$, ſeu media arithmetice proportionalis inter $\alpha\,\text{cot.}\,\mu$ et $\beta\,\text{cot.}\,\nu$.

§. 7. Aequationes, ad quas ſic pervenimus, (§. 4. et 6.), quum tantum repertae fuerint ope certi cuiusdam valoris, quem quantitatibus aequationes fundamentales ingreſſis tribuimus, ſolutio-

lutiones etiam inde reſultantes uſum modo habent valde limitatum. Si citra ullam determinationem pro angulo Φ generalem quaereremus expreſſionem, calculo tedioſiſſimo ad aequationem tandem perduceremur quarti ordinis adeo prolixam, ut omni prorſus uſu careret practico. Quamobrem cum perinde ſit, utra quantitatum Φ vel ψ quaeratur, calculum pro inveniendo angulo ψ, qui quidem minus prolixus videbatur, ad finem perduxi. Aequatio, ad quam ſic perveni, cubica eſt alteraque longe ſimplicior, nihilo tamen minus ad calculum tam parum idonea, ut vix unquam uſus inde ſperari poſſit. Interea tamen ob aliam eiusdem proprietatem mentione haud indigna mihi videbatur. Habet etenim id peculiare, ut angulus δ ſeu ſideris obſervati declinatio prorſus e calculo egrediatur, unde non parum commodi naſci per ſe patet. Si quis enim, calculo prolixo non deterritus, formula iſta uti velit, is, licet tabulis aſtronomicis non inſtructus, quamcunque ſtellam ſive cognitam ſive incognitam, ad Meridiani ſitum definiendum adhibere poterit. Quapropter formulam generalem pro tang. ψ hic ſubiungo, nec opus mihi videtur ut ipſum calculum eo usque proſequar, dum quisque eum facile inſtituere poteſt. Eliminando ſcilicet ex tribus aequationibus fundamentalibus (§. 3.) angulum Φ, ſequens reperitur aequatio cubica:

$$\text{tang}^3\psi\,(A+B\,\text{coſ}^2\varepsilon)+\text{tang}^2\psi\,(B\,(\text{tang.}\nu+\text{tang.}\mu)\,\text{ſin}^2\varepsilon+C))$$
$$+\,\text{tang.}\psi\,(A+B\,(1-\text{ſin}^2\varepsilon\,\text{tang.}\mu\,\text{tang.}\nu))+C=0,$$

in qua eſt

$$A=\text{coſ.}\varepsilon\,(\text{tang.}\nu\,(\text{coſ.}(\beta-\alpha)-\text{coſ.}\beta)-\text{tang.}\mu\,(\text{coſ.}(\beta-\alpha)-\text{coſ.}\alpha))$$
$$-\,\text{ſin.}(\beta-\alpha)\,\text{tang.}\mu\,\text{tang.}\nu;$$

$$B=\text{ſin.}\beta-\text{ſin.}\alpha-\text{ſin.}(\beta-\alpha);\ \text{et}$$

$$C=\text{ſin.}\alpha\,\text{tang.}\nu-\text{ſin.}\beta\,\text{tang.}\mu-\text{coſ.}\varepsilon\,\text{tang.}\mu\,\text{tang.}\nu\,(\text{coſ.}\alpha-\text{coſ.}\beta).$$

Poſſet quidem haec aequatio ad quadraticam deprimi, ſi quartam adhuc obſervationem addere vellemus; tunc autem adeo

 fieret

ſieret complicata, ut procul dubio praeſtet hanc aequationem cubicam tentando ſolvere. Ceterum cuivis facile patebit, quomodo huic aequationi cubicae ſimplicior indui poſſit forma, quare his non diutius immoror. Quum denique angulos μ, ν, vel α, β, pro arbitrio determinare liceat, praeprimis coefficiens A huiusmodi determinatione reddi adhuc poteſt ſimplicior. Velut ſi faciamus $\beta = 2\,\alpha$, ut fiat coſ. $(\beta - \alpha) =$ coſ. α, obtinebimus

$$A = \text{tang.}\,\nu\,(\text{coſ.}\,\varepsilon\,(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,2\,\alpha) - \text{ſin.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\mu), \text{ et}$$

$$B = \text{ſin.}\,2\,\alpha - 2\,\text{ſin.}\,\alpha = -2\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin}\,v.\,\alpha.$$

§. 8. Reſtat adhuc, ut Problema noſtrum ſecundum paucis exponamus. Quot quantisque difficultatibus exacta *elevationis Poli* definitio ſit obnoxia, neminem Aſtronomorum latet. Methodi vulgares, quae omnes ad altitudines obſervandas reducuntur, ſequentibus praeſertim incommodis ſunt ſubiectae. Summa vel perfecta exactitudo in diviſione ſectoris, ſine qua altitudo exacte capi nequit, vix unquam ſperari poteſt; quinimo inſtrumentum perfectiſſimum pretioque ingenti paratum examine atque correctione ſemper adhuc indiget, quae ſane res eſt haud parvi laboris atque difficultatis. Vix pauciores occurrunt difficultates nec minore opus eſt circumſpectione in ipſa altitudine obſervanda, quod peritiſſimus quisque Aſtronomus haud diffitebitur. Reſtat denique correctio ob refractionem neceſſaria, quae ob refractionis variationem non minus eſt difficilis atque incerta. Incommodis his ut mederetur, Aſtronomus Cel. *Maximilianus Hell* novam propoſuit methodum, eamque in *Ephemeridibus Aſtronomicis Vindobonenſ. anni* 1775 luculenter expoſuit. (*) Methodus haec in eo verſatur, ut e Catalogo

(*) Commodum inde redundans, ſi loco altitudinis abſolutae differentia altitu-

logo fixarum binae eligantur fixae, ſub eodem gradu altitudinis culminantes, una in Hemiſphaerio auſtrali, altera in boreali, earumque altitudines in ipſo culminationis momento capiantur; aut, cum in praxi binae altitudines aequales duarum fixarum in oppoſitis plagis culminantium nunquam aut rariſſime haberi poſſint, ut binae fixae eligantur, quarum altitudinum differentia intra ſemigradum contineatur, haecque differentia ope Micrometri obſervetur. Methodi ſuae utilitatem ſequente propoſitione declaravit: *Sine ullo Quadrante, aut ſectore in gradus diviſo Poli elevationem, quam exactiſſime reperiendi.* Plura de ea dicere ſuperfluum cenſeo, quoniam ea ob utilitatem ſuam Aſtronomis mox adeo ſe commendavit, ut fere nemini ſit ignota. Sequentia tamen circa eam admonenda mihi videntur. 1.) Quoniam ſtellae *culminantes* ſunt obſervandae, aut lineae Meridianae determinatio iam ſupponitur, aut pluribus obſervationibus operoſis opus eſt. 2.) Poli elevatio ſaltem propemodum iam cognita eſſe debet, ac praevio calculo opus eſt, quo binae eligi poſſint fixae, ſub eadem fere altitudine culminantes. 3.) Differentiae altitudinum obſervatio requirit, ut obſervator accurato ſaltem Micrometro ſit inſtructus. 4.) Non poteſt quaevis ſtella hunc in finem adhiberi, unde tot obſervationes inſtitui nequeunt, quot ſufficerent, ut ex iis exactum ſumeretur medium. 5.) Quoniam altitudinum differentia actu obſervatur, etiam hic refractionis effectus eſt computandus, quod erat evitandum.

titudinum fere aequalium binarum ſtellarum obſervetur, quod nempe ſic effici poſſit, ut erroribus inſtrumentorum, etc. obſervationes plane non afficiantur, Cel. Aſtronomus in Academia Petropolitana Du. Griſchow longe iam antea oſtendit in diſſertatione, quam videre licet in Nov. Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. V. pag. 417, quod hic annotare iuſtitia iubet.

§. 9. Quae meditanti alia ſe mihi obtulit methodus admodum ſimplex, qua omnia haec incommoda evitantur, et quae nihil requirit, niſi ut obſervator bono inſtructus ſit horologio atque tubo, qui in quovis altitudinis gradu figi poteſt, qua igitur eadem commoda plenarie obtinentur. Totum negotium in eo verſatur, ut binae fixae, quarum declinationes ſunt cognitae, in eodem altitudinis gradu *bis* obſerventur, ante et poſt culminationem, atque bina tempora inter culminationes elapſa annotentur. Methodi huius ſimplicitas cuivis apparet, inprimis ſi notetur, easdem obſervationes ſimul inſervire motui horologii ope altitudinum correſpondentium examinando.

Sint itaque (Fig. 2.) binae fixae A, B, quarum declinationes α et β, et quae gyrantur in Parallelis *a* A, *b* B, bis obſervatae in A et B ſub eodem Almicantharat M N, ante et poſt culminationem in Meridiano Z M, ſitque elapſum inter binas obſervationes fixae A tempus angulo horario $= 2\lambda$ correſpondens, inter binas autem obſervationes fixae B angulus horarius $= 2\mu$, ſicque habebimus $APM = \lambda$, $BPM = \mu$, $PA = 90^\circ - \alpha$, $PB = 90^\circ - \beta$. Poſita nunc elevatione poli $PR = x$, habemus in triangulo A P Z,

$$\text{coſ.}\, ZA = \text{coſ.}\, APM\, \text{ſin.}\, PA\, \text{ſin.}\, PZ + \text{coſ.}\, PA\, \text{coſ.}\, PZ,$$

et in triangulo B P Z,

$$\text{coſ.}\, ZB = \text{coſ.}\, BPM\, \text{ſin.}\, PB\, \text{ſin.}\, PZ + \text{coſ.}\, PB\, \text{coſ.}\, PZ,$$

quibus formulis, ob $ZA = ZB$ (*per hyp.*), aequatis, atque valoribus ſupra aſſumtis introductis, nanciſcimur

$$\text{coſ.}\, \lambda\, \text{coſ.}\, \alpha\, \text{coſ.}\, x + \text{ſin.}\, \alpha\, \text{ſin.}\, x = \text{coſ.}\, \mu\, \text{coſ.}\, \beta\, \text{coſ.}\, x + \text{ſin.}\, \beta\, \text{ſin.}\, x,$$

et diviſione inſtituta per coſ. x,

$$\text{tang.}\, x = \frac{\text{coſ.}\, \lambda\, \text{coſ.}\, \alpha - \text{coſ.}\, \mu\, \text{coſ.}\, \beta}{\text{ſin.}\, \beta - \text{ſin.}\, \alpha}.$$

Pari

Pari modo quotcunque ſtellae in eodem Almicantharat M N obſervari poſſunt, unde e. gr. pro tertia fixa obſervata eiusmodi adipiſcemur aequationem:

$$\text{tang. } x = \frac{\text{coſ. } \lambda \text{ coſ. } \alpha - \text{coſ. } \nu \text{ coſ. } \gamma}{\text{ſin. } \gamma - \text{ſin. } \alpha} = \frac{\text{coſ. } \mu \text{ coſ. } \beta - \text{coſ. } \nu \text{ coſ. } \gamma}{\text{ſin. } \gamma - \text{ſin. } \beta}.$$

Qui terni valores niſi ſint aequales, ex iis medium eſt ſumendum; unde cum, quotcunque placuerit, fixae obſervari poſſint tubo non mutato, medium ex omnibus obſervationibus ſumtum ſummam polliceri videtur exactitudinem.

SUITE

SUITE AU MÉMOIRE
SUR
LES TABLES LUNAIRES
INSERÉ AU TOME V. DES NOUVEAUX ACTES DE L'ACADÉMIE.

Par M. *KRAFFT.*

Préſenté à l'Académie le 22 Avril. 1790.

§. 1.

Dans un précédent Mémoire ſur ce même objet, (*) j'ai expoſé une methode aiſée, pour reduire les tables lunaires de M. Euler, en transformant les formules qui leur ſervent de baſe, à une nouvelle forme, qui ſans porter le moindre prejudice au degré de leur préciſion, les rend auſſi ſimples dans leur uſage que propres à etre perfectionnées de plus en plus par les obſervations. Je n'en ai fait l'application qu'au ſeul calcul de la longitude, auquel, comme je l'ai demontré par des exemples, cette nouvelle forme des tables donne ſans contredit la plus grande brieveté & ſimplicité qu'on puiſſe deſirer, & par la quelle ces tables l'emporteroient ſur toutes les autres qu'on ait eues jusqu'ici. Il eſt evident & ſeroit ſuperflu à demontrer ici, que cette même methode s'applique avec la même facilité auſſi aux formules qui repreſentent la latitude & la parallaxe horizontale de la Lune. Malgré cela le calcul de la latitude qui en reſulte,

(*) Eſſai ſur les tables lunaires de M. Euler pour les preſenter ſous une forme propre à abreger conſiderablement le calcul des lieux de la Lune. Nov. Act. T. V. pag. 289.

reſulte, tout ſimple qu'il eſt, n'eſt pas encore tel qu'il ne laiſſe plus rien à deſirer ; il demande un nombre conſidérable d'argumens, & ces argumens ſont tous nouveaux, c'eſt à dire, à l'exception d'un ſeul, ils différent tous de ceux que le calculateur a deja été obligé de former pour le calcul de la longitude. J'ai trouvé un moyen facile de faire enſorte, que les argumens des tables de la latitude ſoient tous du nombre de ceux avec lesquels on calcule la longitude, & par une ſuite néceſſaire de cette méthode leur nombre, ſans en negliger aucun, ſe reduit presqu'à la moitié. Comme par ce moyen le calculateur ſera à même de tirer des mêmes tables, & à la fois, les nombres néceſſaires pour le calcul de la longitude, de la latitude & de la parallaxe de la Lune, & que tout moyen de ſimplifier les tables lunaires & leur uſage, peut intéreſſer ſurtout les aſtronomes marins; je me propoſe d'en faire ici un court expoſé, en me rapportant quant à la methode en général, à ce que j'en ai dit dans mon Mémoire précédent.

Expreſſion de la tangente de la latitude vraie de la Lune.

2.) Le calcul de l'équation totale Φ qu'il faut appliquer à la longitude moyenne de la Lune pour en avoir la vraie reduite à l'Ecliptique, étant donné dans mon Mémoire précédent : ſoit

la latitude vraie de la Lune - - - - $= \psi$
la parallaxe horizontale équatorienne de la Lune pour ſa diſtance moyenne à la Terre - - $= \pi$
la parallaxe horizontale équatorienne de la Lune pour une temps donné - - - - $=$ P

on a $\text{tang.}\, \psi = \frac{z}{1+x} \cdot \text{coſ.}\, \Phi$ & $P = \frac{\pi}{1+x} \cdot \text{coſ.}\, \Phi \cdot \text{coſ.}\, \psi$ (*)

(*) Voyés Theor. mot. Lunae nova methodo pertract. pag. 600.

& les deux coordonnées z & x ont d'apres la nouvelle theorie lunaire de M. Euler les valeurs ſuivantes : (*)

$$z = i\mathfrak{p} + ik + i.k^2.\mathfrak{r} + i\varkappa.\mathfrak{s} + i^3.\mathfrak{t}.$$

$$x = \mathfrak{D} + k.\mathfrak{P}\ldots\ldots + a.\mathfrak{S}\ldots\ldots + \varkappa.\mathfrak{U}\ldots\ldots + i^2.\mathfrak{X} \text{ etc.}$$

dans les quelles les quantités conſtantes k, i, $\varkappa$ & a deſignent l'excentricité & l'inclinaiſon moyenne de l'orbite lunaire à l'écliptique, l'excentricité de l'orbite de la terre, & le rapport entre les diſtances moyennes de la terre au ſoleil & à la lune & les quantités variables $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ &c. & $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ &c. ſont données par des ſinus & des coſinus des angles relatifs aux mouvemens moyens (**). En ſuivant donc pour evaluër la valeur $\frac{z}{1+x}$ le même procedé que j'ai employé dans mon premier Memoire pour evaluër l'expreſſion de la tangente Φ, & mettant cette valeur $\frac{z}{1+x} = S$, on a tang. $\psi = S . \text{coſ.} \Phi$. Poſant donc, comme cy deſſus,

l'elongation moy. de la ☾ au ☉ $= p$	l'anomal. moy. du ☉ $= t$
l'anomalie moyenne de la ☾ $= q$	l'arg. moy. de la latit. $= r$

j'ai trouvé pour la valeur S l'expreſſion ſuivante :

$S =$

+ 900663.	ſin. r	+ 1695.	ſin. $(2q + r)$
— 890.	ſin. $3r$	+ 2655.	ſin. $(2q - r)$
+ 5119.	ſin. $(2p + r)$	+ 228.	ſin. $(2p - 2q - r)$
+ 31035.	ſin. $(2p - r)$	+ 302.	ſin. $(t + r)$
— 49954.	ſin. $(q + r)$	+ 252.	ſin. $(t - r)$
— 48429.	ſin. $(q - r)$	— 1416.	ſin. $(2p - t - r)$
— 8166.	ſin. $(2p - q - r)$	+ 565.	ſin. $(2p + t - r)$
— 1989.	ſin. $(2p + q - r)$	— 232.	ſin. $(p - r)$
— 9851.	ſin. $(2p - q + r)$		

où

(*) Theor. mot. Lunae pag. 108.

(**) Ibid. pag. 683 & 688.

où il eſt à remarquer que les coëfficiens numeriques des ſinus ſont des parties dix-millionémes de l'unité.

3.) Comme dans cette expreſſion chaque terme peut devenir poſitif ou négatif ſelon la quantité de l'angle qui en fait l'argument: il eſt facile, par les deux Lemmes connus de la Trigonometrie que j'ai employés pour le même but dans mon premier Mémoire, de faire enſorte, que tous les termes variables demeurent conſtamment poſitifs, & qu'il ne s'y joigne qu'une ſeule quantité négative & qui ſoit conſtante. Par ce moyen j'ai obtenu l'expreſſion ſuivante:

$$S = -0,1063441.$$

$+ 1801326. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + r}{2}\right)^2$	$+ 3390. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + 2q + r}{2}\right)^2$
$+ 1780. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - 3r}{2}\right)^2$	$+ 5310. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + 2q - r}{2}\right)^2$
$+ 10238. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + 2p + r}{2}\right)^2$	$+ 456. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + 2p - 2q - r}{2}\right)^2$
$+ 62070. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + 2p - r}{2}\right)^2$	$+ 604. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + t + r}{2}\right)^2$
$+ 99908. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - q - r}{2}\right)^2$	$+ 504. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + t - r}{2}\right)^2$
$+ 96858. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - q + r}{2}\right)^2$	$+ 2832. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - 2p + t + r}{2}\right)^2$
$+ 16332. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - 2p + q + r}{2}\right)^2$	$+ 1130. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ + 2p + t - r}{2}\right)^2$
$+ 3978. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - 2p - q + r}{2}\right)^2$	$+ 464. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - p + r}{2}\right)$
$+ 19702. \text{ſin.} \left(\frac{90^\circ - 2p + q - r}{2}\right)^2$	

4.) Pour comparer le calcul d'apres cette formule avec celui dont je me propoſe ici de faire un court expoſé, il ſera néceſſaire d'en donner un exemple:

Exemple.

On demande la latitude vraie de la Lune pour le 12 Avril 1754 à $17^h. 23'. 54''$. Temps moy. à Paris. Pour ce

 temps

temps on a pas les tables des mouvemens moyens du Soleil & de la Lune

$$p = 8^s.\ 11^\circ.\ 15'.\ 21'' \quad \Big| \quad t = 9^s.\ 12^\circ.\ 34'.\ 54''$$
$$q = 9^s.\ 17^\circ.\ 24'.\ 20'' \quad \Big| \quad r = 2^s.\ 15^\circ.\ 2'.\ 14''.$$

& par le calcul donné dans mon précédent Mémoire

$$\Phi = 6^\circ.\ 41'.\ 21''.$$

Ces argumens étant ſuppoſés, notre formule donne:

pour l'Argument.	le nombre.	pour l'Argum.	le nombre.
I. r	1772305		1985634
II. $2p+r$	1999	XIV. $2p-t-r$	602
III. $2p-r$	59702	XV. $2p+t-r$	467
IV. $q+r$	47824	XVI. $p-r$	217
V. $q-r$	74357	Somme +	0, 1986920
VI. $2p-q-r$	2924	Quant. conſt. −	0, 1063441
VII. $2p+q-r$	2166		
VIII. $2p-q+r$	19100	$S = +$	0, 0923479
IX. $2q+r$	101	Log. $S =$	8, 9654270 +
X. $2q-r$	4381	Log. coſ. $\Phi =$	9, 9970358 +
XI. $2p-2q-r$	351	Log. tang. $\psi =$	8, 9624628 +
XII. $t+r$	289	Lat. vraie ☾ =	5°. 14′. 26″. Bor.
XIII. $t-r$	135		
Somme	1985634		

où il eſt à remarquer, que la latitude de la Lune eſt boreale ou auſterale ſelon que l'angle ψ eſt poſitif ou négatif.

5.) Les tables mêmes de M. Euler telles que M. Jeaurat les a inſerees à la Connoiſſance des temps pour 1786. donnent la latitude de la ☾ dans cet exemple de 5°. 14′. 40″

&

& elle a été obſervée de 5°. 14′. 28″. (*); donc en comparant le calcul que je viens de faire, avec celui de M. Euler (**) & même avec celui de M. Jeaurat (***), où l'on a encore beſoin de la valeur de la coordonnée x, on verra ſans doute, que par la méthode que j'ai ſuivie ici, le calcul a été conſidérablement abregé ſans porter la moindre atteinte à ſon degré de préciſion. Cependant on voit auſſi, que ce calcul demande encore 16 argumens, & que ces argumens, à l'exception du premier, different tous de ceux par leſquels on calcule la longitude de la Lune (voyés mon premier. Mém. Nouv. Actes de l'Acad. T. V. p. 300). Comme ils n'en different que parceque l'argument moyen de la latitude entre ici dans tous; on peut, par le moyen des deux Lemmes de la Trigonometrie

$$1 + \operatorname{coſ.} \alpha = 2 \,.\, (\operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2}\alpha)^2 \text{ et}$$

$$1 - \operatorname{coſ.} \alpha = 2 \,.\, (\operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2}\alpha)^2$$

donner à la premiere des deux valeurs de S que je viens de trouver, la forme

$$S = B \,.\, \operatorname{ſin.} r + C \,.\, \operatorname{coſ.} r$$

(*) Connoiſſ. de temps 1786. pag. 385.
(**) Theoria motuum Lunae &c. pag. 698.
(***) Connoiſſ. de temps citée cy deſſus.

& je trouve pour les valeurs B et C les expreſſions ſuivantes:

B = + 865207	C = — 162778
+ 51832 . (ſin. $p)^2$	+ 464 . ſin. $\left(\frac{90 - p}{2}\right)^2$
+ 464 . (coſ. $\frac{1}{2} p)^2$	+ 72308 . ſin. $\left(\frac{90^\circ + 2p}{2}\right)^2$
+ 1920 . (ſin. $q)^2$	+ 196766 . ſin. $\left(\frac{90^\circ - q}{2}\right)^2$
+ 3050 . (ſin. $\frac{1}{2} q)^2$	+ 8700 . ſin. $\left(\frac{90^\circ + 2q}{2}\right)^2$
+ 100 . (coſ. $\frac{1}{2} t)^2$	+ 1108 . ſin. $\left(\frac{90^\circ + t}{2}\right)^2$
+ 1780 . (ſin. $r)^2$	+ 1780 . ſin. $\left(\frac{90^\circ - 2r}{2}\right)^2$
+ 456 . (ſin. $p - q)^2$	+ 456 . ſin. $\left(\frac{90^\circ + 2p - q}{2}\right)^2$
+ 3978 . (coſ $\frac{2p + q}{2})^2$	+ 3978 . ſin. $\left(\frac{90^\circ - 2p - q}{2}\right)^2$
+ 3370 . (ſin. $\frac{2p - q}{2})^2$	+ 36034 . ſin. $\left(\frac{90^\circ - 2p + q}{2}\right)^2$
+ 1130 . (ſin. $\frac{2p + t}{2})^2$	+ 1130 . ſin. $\left(\frac{90^\circ + 2p + t}{2}\right)^2$
+ 2832 . (coſ. $\frac{2p - t}{2})^2$	+ 2832 . ſin. $\left(\frac{90^\circ - 2p + t}{2}\right)^2$

où l'on voit, que les argumens de ces deux valeurs B & C ſont tous du nombre de ceux, avec les quels on calcule la longitude, & que leur nombre, de 16 qu'ils ont été, s'eſt reduit à 9, les angles p & $\frac{1}{2} p$, ainſi que q & $\frac{1}{2} q$ ne donnant que deux tables.

Expreſſion de la Parallaxe horizontale équatorienne de la Lune.

6.) Par un procedé tout à fait ſemblable ſur la valeur $\frac{\pi}{1 + x}$, & en ſuppoſant avec M. Jeaurat dans l'endroit cité $\pi = 56' \, 48''$; je trouve la vraie parallaxe horizontale équatorienne de la Lune pour un temps donné quelconque

P =

$P = D \cdot \text{coſ.}\, \psi \cdot \text{coſ.}\, \phi$ ſecondes

& $D = 3166,56$

$+ \quad 1,99 \cdot \text{ſin.} (\frac{1}{2} p)^2$	$+ \quad 7,86 \cdot \text{coſ.} (p - q)^2$
$+ \quad 47,26 \cdot \text{coſ.} (p)^2$	$+ \quad 69,30 \cdot \text{ſin.} (\frac{2p-q}{2})^2$
$+ \quad 0,19 \cdot \text{ſin.} (q)^2$	$+ \quad 3,31 \cdot \text{ſin.} (\frac{2p-t}{2})^2$
$+ \quad 371,47 \cdot \text{ſin.} (\frac{1}{2} q)^2$	$+ \quad 2,54 \cdot \text{coſ.} (\frac{2p-q-t}{2})^2$
$+ \quad 13,54 \cdot \text{ſin.} (r)^2$	

en ſorte qu'avec 7 argumens, qui ſe trouvent tous dans le nombre de ceux qu'on a deja formés pour le calcul de la longitude, on trouvera auſſi la parallaxe horizontale équatorienne de la Lune. D'ailleurs il eſt evident, de quelle façon il faudroit changer les coëfficiens numeriques des termes de cette expreſſion, ſi l'on vouloit ſuppoſer à la parallaxe horizontale équatorienne de la Lune dans ſa diſtance moyenne à la Terre une valeur différente de celle que je viens d'adopter.

Type du calcul de la longitude, de la latitude & de la parallaxe horizontale équatorienne de la ☾ par des tables conſtruites d'apres mes formules.

7.) En poſant la valeur trouvée dans mon Mémoire précédent $\frac{y}{1+x} = \text{tang.}\, \phi = A$, & les valeurs B, C & D comme cy - deſſus, le calcul de l'exemple précédent ſe fera par ces tables de la façon ſuivante :

Les argumens ſont comme cy deſſus :

L'ar-

L'argument.		donne pour les valeurs.			
		A	B	C	D
I.	p	198170	46634	58609	6,20
II.	q	2166601	2817	195098	130,36
III.	t	760	61	13	
IV.	r	9988	1661	446	12,64
V.	$p+q$	650			
VI.	$p-q$	1510	159	10	5,13
VII.	$2p+q$	500	2672	121	63,00
VIII.	$2p-q$	355240	3064	28379	
IX.	$4p-q$	1747			
X.	$2p-3q$	113			
XI.	$2p+t$	1596	327	1077	
XII.	$2p-t$	12414	330	2325	2,92
XIII.	$q+t$	8067			
XIV.	$q-t$	4843			
XV.	$2p-q-t$	760			1,76
XVI.	$2p-q+t$	450			
XVII.	$p+t$	485			
XVIII.	$2p-2r$	2304			
XIX.	$q+2r$	4296			
XX.	$q-2r$	524			
XXI.	$2p+q-2r$	9			
XXII.	$2p-q-2r$	8			
XXIII.	$2p+q-t$	904			
Somme		+0,2771939	+0,0057715	+0,0286078	+ 222,01
Quant. conſt.		−0,1599167	+0,0865207	−0,0162778	+3166,56
		+0,1172772 = A	+0,0922922 = B	+0,0123300 = C	+3388,57 = D

Ayant

Ayant tiré ces quatre valeurs des tables lunaires; on trouve

$$\Phi = \text{Arc. tang. } A = + 6^\circ.\ 41'.\ 21''$$

et le reſte du calcul s'acheve de la façon ſuivante:

Log. B = 8,9651372 +	Log. C. = 8,0903145 +	Log. D = 3,5300164
Log. ſin. r = 9,9850182 +	Log. coſ. r = 9,4119577 +	L. coſ. ψ = 9,9981813
L. B. ſin. r = 8,9501554 +	L. C. coſ. r = 7,5022722 +	L. coſ. Φ = 9,9970358
B. ſin. r = + 0,0891570	C. coſ. r = + 0,0031789	Log. P = 3,5252335
C. coſ. r = + 0,0031789	Log. S = 8,9653706 +	P = 3351″. 4
S = + 0,0923359	Log. coſ. Φ = 9,9970358 +	
	L. tang. ψ = 8,9624064 +	
	$\psi = + 5^\circ.\ 14'.\ 23''$	

Ayant donc la longitude moyenne de la Lune pour cet exemple

$$M = 9^s.\ 2^\circ.\ 32'.\ 57''$$

on trouve par le calcul précédent pour le temps donné

La long. vraie ☾ reduite à l'Eclipt. = M + Φ = $9^s. 9^\circ. 14'. 18''$

La latitude de la ☾ - - = ψ = 5. 14. 23 Bor.

La parallaxe horizont. équat. ☾ = P = 55. 51. 4.

Reſultats qui s'accordent tres bien avec ceux, qu'on trouve par les tables mêmes de M. Euler.

8.) Ayant trouvé par la méthode précédente, des ſeries qui expriment tang. Φ et tang. ψ; il eſt clair qu'on pourra ſans beaucoup de peine en trouver d'autres qui repreſentent coſ. Φ & coſ. ψ, enſorte qu'on pourroit rendre le calcul de la latitude & de la parallaxe abſolument independant de celui de la longitude, comme je l'ai dit dans mon Mémoire précédent.

DE ECLIPSI SOLIS.

ANNO 1788 DIE $\frac{24 \text{ Maii}}{4 \text{ Iunii}}$ OBSERVATA.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKY.

Conuent. exhib. die 29 Avril. 1790.

Pro explorando motu horologii, ad quod Vir Cl. *Tchernoi* et ego Eclipſim hanc obſeruauimus diebus 23 et 24 Maii captae ſunt altitudines Solis correſpondentes, ex quibus prodiit
Die 23 Maii meridies verus ad horologium $11^h. 21'. 10'',4$
—— 24 Maii meridies verus ad horologium 11. 20. 32, 3
Vnde colligitur acceleratio horologii ſpatio diei ſolaris medii $48''$, 3

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Ex mea obſeruatione initium Eclipſis	$9^h.20'. 4''.$	$9^h.59'.29''$
Finis	11. 0. 12.	11. 39. 39
Ex obſeruatione Dni *Tchernoi* initium	9. 20. 10.	9. 59. 35
Finis	11. 0. 16.	11. 39. 43

Obſeruatio a Viro Cl. *Tchernoi* inſtituta eſt tubo Achromatico Dollondiano tripedali triplici obiectiuo praedito, mea vero capta eſt teleſcopio Gregoriano duorum pedum.

Ele-

Elementa Aſtronomica.

Ex tabulis Maieri Lunaribus pro Eclipſi hac deducta.

Tempore medio Grenouicenſi die $\frac{23 \text{ Maii}}{3 \text{ Iunii}}$ $20^h. 46'. 15''$

Longitudo ☉lis media eſt	73°.	$26'$.	$43''$
- - - - vera	74.	16.	29, 6
½ Diameter ☉		15.	48, 2
Motus horarius ☉		2.	23, 4
Longitudo ☽ vera	74.	10.	27, 2
Latitudo ☽ Bor.		15.	36, 6
Parallaxis ☽ aequator.		60.	34, 1
½ Diameter ☽		16.	30, 2
Motus horar. ☽ in Longitud.		36.	52, 0
in Latitud.	—	3.	24, 9

Subſtratis his Elementis, parallaxi Solis horizontali aſſumta 8″, 5 et ratione diametri aequatoris ad axem telluris 201 : 200 obtinui pro initio Petropoli obſeruato:

Parallaxim Longitudinis ☽	623″, 4
- - - Latitudinis	2384, 1
½ Diametr. ☽ appar.	1003, 2.

Vnde cum Latitudo Lunae momento initii reſpondens ex computo meo ſit 1107″, 6, prodit Latitudo Lunae apparens 1276″,5 et diſtantia centrorum Solis et Lunae apparens iuxta Eclipticam 1476″, 0, et cum diſtantia haec ob parallaxim Longitudinis minor apparuerit vera ſiue ex centro Telluris viſa, habebitur haec 2099″, 4 quae in tempus per motum horarium Lunae a Sole conuerſa dat $1^h. 0'. 54''$. Vnde colligitur tempus verum coniunctionis ex mea obſeruatione $23^h. 0'. 23''$ atque ex obſeruatione Dni *Tchernoi* 23. 0. 29.

Pari modo pro fine a me obſeruato $23^h. 39'. 39''$ reperi

Parallaxim Lunae in Longitudinem	76″,0
in Latitudinem	2208, 2
½ Diametr. ☽ appar.	1004, 2

 Lati-

Latitudine Lunae vera exiſtente $765''$, 6: hinc diſtantia centrorum Solis et Lunae apparens iuxta Eclipticam fit $1315''$, 8, et cum parallaxis Lunae hoc caſu minuat Longitudinem Lunae veram, habebitur diſtantia centrorum vera ſecundum Eclipticam $1391''$, 8, quae in tempus conuerſa dat $40'. 22''$; vnde colligitur momentum coniunctionis ex mea obſeruatione $22^h. 59'. 17''$ et ex obſeruatione ſocii $22^h. 59'. 21''$. non habita ratione correctionum, quas momenta coniunctionis a variatione ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, Latitudinis Lunae, nec non parallaxis illius aequatoreae recipere poſſunt. Formula vero, qua correctio iſta momento coniunctionis applicanda exprimitur, ſequenti modo facillime erui poſſe videtur.

Tab. VIII. Fig. 3. Sit ☉ locus Solis in Ecliptica, et ☽ locus Lunae apparens, ex ☽ demiſſo in Eclipticam perpendiculo, ☽B exprimet Latitudinem Lunae apparentem, et B☉ differentiam Longitudinem apparentem, prodato quouis momento. Cum pro illo ex Tabulis detur Latitudo Lunae vera ſiue Geocentrica $= \lambda$, et computatae ſint parallaxes in Longitudinem aeque ac in Latitudinem, quarum prior ſit $= p$, poſterior vero $= p'$, ſi de initio vel fine Eclipſis ſit ſermo, ☽☉ erit aequalis ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, quae ſi ponatur $= s$, habebitur B☉ ſiue differentia Longitudinum apparens

$$= \surd(ss - (\lambda - p')^2)$$

et differentia Longitudinum Geocentrica

$$= \surd(ss - (\lambda - p')^2) \pm p.$$

Vt nunc reperiatur variatio ipſius B☉ a correctione ſummae ſemidiametrorum, Latitudinis Lunae, nec non parallaxis aequatoreae oriunda, ſit correctio parallaxeos $= \pi$ erit correctio parallaxis in Longitudinem $= \frac{p\pi}{\Pi}$, in Latitudinem $\frac{p'\pi}{\Pi}$, deno-

denotante Π parallaxin Lunae aequatoream ex tabulis elicitam. Differentietur iam valor ipſius B ⊙, et habebitur

$$\partial.\,B\odot = \frac{s\,\partial s - \lambda\,\partial\lambda + \lambda\,\partial p' + p'\,\partial\lambda - p'\,\partial p}{\sqrt{(ss - (\lambda - p')^2)}} \text{ ſiue}$$

$$\partial.\,B\odot = \frac{s\,\partial s - (\lambda - p')\,\partial\lambda + (\lambda - p')\,\partial p'}{\sqrt{(ss - (\lambda - p')^2)}}$$

$$= \frac{☽\odot}{B\odot}\,\partial s - \frac{☽B\,\partial\lambda}{B\odot} + \frac{☽B\,\partial p'}{B\odot},$$

poſito itaque angulo ☽ ⊙ B $= \Phi$, habebitur

$$\partial B\odot = \partial s \text{ ſec. } \Phi - \partial\lambda \text{ tang. } \Phi + \partial p' \text{ tang. } \Phi,$$

et integra correctio diſtantiae centrorum Solis et Lunae ſecundum Eclipticam, ob $\partial p' = \frac{p'\pi}{\Pi}$ et $\partial p = \frac{p\pi}{\Pi}$

$$\partial.\,B\odot \pm \partial p = \partial s \text{ ſec. } \Phi - \partial\lambda \text{ tang. } \Phi + \frac{p'\pi \text{ tang. } \Phi}{\Pi} \pm \frac{p\pi}{\Pi}$$

hinc poſito $\partial s = \delta$ et $\partial\lambda = y$ prodit formula a beato Lexell propoſita, in tempus conuertenda

$$\partial B\odot \pm \partial p = \delta \text{ ſec. } \Phi - y \text{ tang. } \Phi + \frac{p'\pi \text{ tang. } \Phi}{\Pi} \pm \frac{p\pi}{\Pi}.$$

Quodſi eueniat, vt parallaxis Latitudinis Lunae ſuperet Latitudinem veram, pro vt euenit in Eclipſi, de qua hic agitur, atque apparens ex boreali tranſeat in auſtralem, ſequenti formula erit vtendum

$$\partial.\,B\odot \pm \partial p = \delta \text{ ſec. } \Phi + y \text{ tang. } \Phi - \frac{p'\pi \text{ tang. } \Phi}{\Pi} \pm \frac{p\pi}{\Pi}.$$

Ad normam harum formularum computo peracto adhibitis momentis a me obſeruatis prodit momentum coniunctionis ad meridianum obſeruatorii Petropolitani

Ex initio	$23^h.\ 0'.23''$	$+ 2.34\,\delta + 1,50\,y - 0,69\,\pi.$
Ex fine	$22.\ 59.\ 17$	$- 2.58\,\delta - 1,90\,y + 1,14\,\pi.$
Hinc	66	$+ 4.92\,\delta + 3,40\,y + 1,63\,\pi = 0.$

Praeter obſeruationem Petropoli habitam reuocaui ad calculum omnes, quas reperi in Ephemeridibus Berolinenſibus ad annum 1791 inſertas, ſcilicet:

 Gre-

Grenouici initium 19^h. 24$'$. 46$''$,5
Finis 21. 1. 25, 5

Viennae initium 20. 25. 49.
Finis 22. 32. 40.

Pragae initium 20. 21. 29.
Finis 22. 21. 15.

Maſſiliae initium 19. 26. 42, 5
Finis 21. 29. 23, 5

Cremifani initium 20. 15. 20.
Finis 22. 19. 50, 7

Mitauae initium 21. 20. 15.
Finis 23. 8. 52.

Aſſumtis Elementis Tabularibus ſupra relatis, et computo peracto prodiit:

	Longitud. ☽	Latit. ☽	Parall. Long.	Parall. Latit.	½ Diam. ☽ appar
Gronouici pro initio	73°.19$'$. 8$''$,9	20$'$.22$''$.	1816$''$,4	2532$''$,8	999$''$,3
pro fine	74. 18. 31.	14. 51, 8	1366, 6	2172, 5	1002, 7
Viennae pro initio	73. 16. 26.	20. 36, 8	1690, 0	2153, 4	1001, 8
pro fine	74. 34. 22, 5	13. 23, 7	731, 4	1722, 7	1005, 4
Pragae pro initio	73. 18. 33, 8	20. 25.	1631, 6	2254, 2	1001, 6
pro fine	74. 32. 9, 2	13. 36.	788, 2	1855, 5	1005, 0
Maſſiliae pro initio	73. 7. 10, 5	21. 28, 2	2202, 4	2188, 3	999, 3
pro fine	74. 22. 33, 4	14. 29, 4	1457, 3	1666, 4	1004, 2
Cremifani pro initio	73. 15. 28, 9	20. 42, 4	1756, 7	2188, 5	1001, 4
pro fine	74. 31. 58, 7	13. 37, 0	861, 1	1752, 7	1005, 2
Mitauae pro initio	73. 32. 8, 6	19. 9, 5	999, 5	2342, 3	1002, 8
pro fine	74. 38. 52, 9	12. 58, 6	223, 6	2088, 3	1004, 7

Vnde

Vnde poſita vt ante correctione ſemiſummae diametrorum δ Latitudinis Lunae y, et parallaxis aequatoreae π pro tempore coniunctionis reſultabunt ſequentes expreſſiones:

Grenouici ex initio	$22^h.59'.14''$	$+2.36\delta+1.59y-0,24\pi$
ex fine	20. 58. 21.	$-2.31\delta-1.52y+1,56\pi$
Hinc I.	53.	$+4.67\delta+3.11y-1,80\pi=0$
Viennae ex initio	22. 4. 39.	$+1.97\delta+0.93y+0,26\pi$
ex fine	22. 3. 59.	$-1.97\delta-0.93y+0,79\pi$
II.	40.	$+3.94\delta+1.86y-0,53\pi=0$
Pragae ex initio	21. 56. 51.	$+2.05\delta+1.08y+0,11\pi$
ex fine	21. 56. 9.	$-2.05\delta-1.09y+0,93\pi$
III.	42.	$+4.10\delta+2.17y-0,82\pi=0$
Maſſiliae ex initio	21. 20. 41.	$+1.96\delta+0.91y+0,51\pi$
ex fine	21. 19. 56.	$-1.90\delta-0.77y+1,06\pi$
IV.	45.	$+3.86\delta+1.68y-0,55\pi=0$
Cremiſani ex initio	$21^h.55'.44''$	$+1.98\delta+0.96y+0,26\pi$
ex fine	21. 55. 5.	$-1.97\delta-0.94y+0,86\pi$
V.	39.	$+3.96\delta+1.90y-0,60\pi=0$
Mitauae ex initio	22. 33. 50.	$+2.19\delta+1.34y-0,39\pi$
ex fine	22. 33. 20.	$-2.34\delta-1.57y+1,26\pi$
VI.	30.	$+4.53\delta+2.91y-1,65\pi=0.$

Aequationibus I. II. III. et V. optime ſatisfaciunt valores $\delta=-5$, $y=-10$ et $\pi=0$, et ſubſtitutis his valoribus ſequentia pro coniunctione prodeunt momenta:

		Longit. a mer. Grenov.
Grenouici ex initio	$20^h.\ 58'.\ 47''$	
ex fine	20. 58. 47	
Viennae ex initio	22. 4. 20	$1^h.\ 5'.\ 33''$
ex fine	22. 4. 18	1. 5. 31.
Pragae ex initio	21. 56. 31	57. 44.
ex fine	21. 56. 29	57. 42.

Maſſi-

Maſſiliae	ex initio	21^h. 20$'$. 22$''$		21$'$. 35$''$.
	ex fine	21. 20. 13		21. 26.
Cremiſani	ex initio	21. 55. 25		56. 38.
	ex fine	21. 55. 24		56. 37.
Mitauae	ex initio	22. 33. 36		1^h. 34. 49.
	ex fine	22. 33. 47		1. 35. 0.
Petropoli	ex initio	23. 59. 57		2. 1. 10.
	ex fine	59. 49		2. 1. 2.
	ex fine Socii	59. 53		2. 1. 6.

Verum ſequeretur hinc finem a me obſeruatum 14, a ſocio vero 10 minutis ſecundis eſſe erroneum, id quod de fine nequaquam admitti poſſe videtur, praeſertim cum momentum finis Viri Celeberr. *Inochodzof*, qui in ſpecula inferiori ad aliud horologium obſeruationem peregerat, exacte conſentiat cum momento a me obſeruato. Conferenti vero Longitudines locorum, quae hinc reſultant cum Longitudinibus eorundem aliunde cognitis mox patebit, non obſtante egregio earum conſenſu, aut valores pro δ et y a me aſſumtos non eſſe veros, aut in ipſis obſeruationibus errores quosdam eſſe admittendos. Sic Longitudo Viennae a meridiano Grenouicenſi ex initio aeque ac ex fine deducitur hic 1^h. 5$'$. 32$''$, cum ea aliunde conſtet 1^h. 5$'$. 24$''$ aut 26$''$; Longitudo Pragae prodit 57$'$. 44$''$, aliae vero obſeruationes eam indicant 57$'$. 33$''$. Hinc non ſine ratione concludere mihi videor pro δ, y et π alios quaerendos eſſe valores eiusmodi nempe, quibus obſervatio Petropolitana a tam enormi errore liberetur, neque tamen aliae obſervationes nimis reddantur erroneae. Facile hac de re iudicium ferri potuiſſet, ſi plures obſeruationes ſuppeterent, quas, ſimulac compos earum factus fuero, lubens ad calculum reuocabo; vbi in primis attendendum videtur ad rationem diametri aequatoris ad axem telluris;

ris; nam Petropoli pro fine parallaxis Lunae Longitudinem eius minuit, cum contra in omnibus a me recenſitis obſeruationibus ob parallaxim Lunae Longitudo maior vera apparuerit.

Interea momento coniunctionis $20^h. 58'. 47''$ ad meridianum Grenouicenſem ſpectato tanquam vero aut vero proximo, prodit pro illo Longitudo Solis $74°. 16'. 54'',6$ Longitudo vero Lunae $74°. 16'. 53'',6$ ſic vt error Tabularum Lunarium in Longitudinem non maior fuerit quam vnius minuti ſecundi.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES FAITES À ST. PÉTERSBOURG EN L'ANNÉE MDCCLXXXVIII.

Suivant le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 9 Juillet 1789.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1788.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure	P. cent.	jour,	heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.82	29.	8. s.	27.18	17.	3. s.	164	28.00	27.988
Février	28.72	7. 14.	à midi 9. s.	27.50	20.	5. s.	122	28.11	28.229
Mars	28.78	2.	9. m.	27.44	5.	10. s.	134	28.11	28.255
Avril	28.55	30.	10. s.	27.63	5.	3. m.	92	28.09	28.094
Mai	28.64	17.	7. m.	27.64	23.	10. m.	100	28.14	28.129
Juin	28.49	6.	6. m.	27.87	23.	3. s.	62	28.18	28.112
Juillet	28.34	21. 24.	4. m. 8. m.	27.91	8.	4. s.	43	28.12½	28.157
Août	28.34	22.	10. m.	27.66	5.	à midi	68	28.00	28.077
Septembr.	28.66	7.	9. m.	27.73	3.	6. m.	93	28.19½	28.267
Octobre	28.53	9.	10. m.	27.12	18.	8. s.	141	27.82½	27.867
Novembr.	28.90	25.	à midi	27.44	12.	11. m.	146	28.17	28.222
Décembr.	28.67	29.	6. m.	27.32	24.	9. m.	135	27.99½	28.126

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *ſoir* ou *après-midi*.

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au deſſus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	Baromètre, un demi-mois au deſſus de Pouces. mill.
Janvier.	18. 21	17. 6	15. 3	13. 9	11. 15	27. 990
Février	23. 15	20. 15	19. 3	18. 18	16. 15	28. 306
Mars	27. 0	26. 3	24. 21	23. 18	20. 18	28. 313
Avril	25. 15	23. 0	18. 12	12. 21	10. 6	28. 062
Mai	29. 18	26. 21	22. 21	14. 18	9. 0	28. 091
Juin	30. 0	28. 21	23. 21	13. 0	7. 18	28. 075
Juillet	31. 0	31. 0	25. 3	19. 6	12. 21	28. 170
Août	30. 0	27. 18	20. 18	13. 12	7. 21	28. 056
Sept.	29. 9	28. 9	27. 0	24. 0	17. 18	28. 281
Oct.	17. 6	13. 3	10. 3	6. 3	3. 18	27. 843
Nov.	25. 18	23. 6	22. 3	19. 12	14. 18	28. 188
Déc.	27. 15	25. 18	23. 21	14. 9	11. 0	28. 095
Année 1788	315. 21	292. 0	253. 9	193. 6	144. 0	183 jours au deſſus de 28.120
du 1 Nov. 1787 au 1 Mai. 1788	145. 3	127. 6	107. 6	90. 12	76. 15	91 jours au deſſus de 28.103
du 1 Mai. au 1 Nov. 1788	167. 9	156. 0	129. 18	90. 15	59. 0	92 jours au deſſus de 28.105

La plus grande hauteur du Baromètre en 1788 a donc été obſervée, le 25 Novembre à 12 heures midi, de 28. 90 pouces de Paris. Thermomètre de Délisle 158, vent du Sud, ciel couvert.

La plus petite hauteur 27, 12. le 18 Octobre à 8 heures du ſoir. Thermomètre 151, ciel couvert, beaucoup de neige & vent de l'Eſt très fort.

Ainſi la variation totale = 178 centiemes parties de pouce, & le milieu 28. 01.

La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs obſervées du Baromètre diviſée par leur nombre =28,125, ou bien $28\frac{1}{8}$ pouces de Paris, qui répond à une hauteur de 30 pouces de Londres.

Cette hauteur moyenne eſt pour les ſix mois d'hyver depuis le 1er Novembre 1787 jusqu'au 1er Mai 1788, = 28.113, & pour les ſix mois de l'été ſuivant, depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 1788, = 28.101; c'eſt à dire de $\frac{12}{100}$ pouce, ou d'$\frac{1}{7}$ ligne moindre que la hauteur moyenne hyvernale.

Le ſecond tableau nous fait voir, que la hauteur barométrique a été

au

au deſſus de	en 1788.	depuis le 1 Nov. 1787 jusqu'au 1 Mai 1788	depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Nov. 1788
27. 80	315 jours 21 h.	145 jours 3 h.	167 jours 9 h.
27. 90	292 —— 0 –	127 —— 6 –	156 —— 0 –
28. 00	253 —— 9 –	107 —— 6 –	129 —— 18 –
28. 10	193 —— 6 –	90 —— 12 –	90 —— 15 –
28. 20	144 —— 0 –	76 —— 15 –	59 —— 0 –
	183 jours au deſſus de 28. 120	91 jours au deſſus de 28. 103	92 jours au deſſus de 28. 105

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	Temps heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	7.	3. m.	45	27. 92	+ 72	152	NOu. fort.	ciel couvert.
	8.	12. s.	24	28. 64	—102	180	NE.	ciel ſerein.
	9.	12. s.	18	27. 62	+ 76	163	NOu.	ciel couvert, neige.
	10.	6. s.	27	28. 38	— 82	166	NE. fort.	ciel demi-couvert.
	11.	9. s.		27. 56		155	NOu. fort.	neige, ciel couvert.
Janv.	13.	6. s.		27. 22		164	calme	brouillard, c. couvert, neige.
	14.	6. s.	45	27. 55	+ 72	170	N.	ciel couvert.
	16.	3. s.	24	28. 27	—109	180	NOu. fort.	ciel ſerein.
	17.	3. s.		27. 18		170	S. ff.	neige, ciel couvert.
	21.	3. m.	33	28. 12	— 76	194	calme	ciel ſerein, brouillard.
	22.	12. m.		27. 36		150	S. fort.	beaucoup de neige, c. couv.
	25.	3. m.	21	27. 87	— 45	166	SE. fort.	c. demi-couv. neige.
	25.	12. s.	24	27. 42	+ 35	158	E.	ciel couvert.
	26.	12. s.		27. 77		155	NE.	beaucoup de neige, c. couv.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Janv.	20.	12. s.	24	27. 77	+55	155	NE.	beaucoup de neige, c. couv.
	27.	12. s.	24	28. 32	+33	154	NE.	c. couv. neige.
	28.	12. s.	20	28. 65	+17	163	NE.	c. couvert, brouillard.
	29.	8. s.		28. 82		157	E.	c. demi-couvert.
Févr.	20.	5. s.	24	27. 50	+50	171	SE. fort.	neige, c. couvert.
	21.	5. s.		28. 00		170	SOu.	ciel ſerein.
Mars.	2.	9. m.	48	28. 78	—118	170	SE. fort.	ciel ſerein.
	4.	9. m.		27. 60		164	E.	beaucoup de neige, c. couv.
	5.	10. s.	38	27. 44	+58	160	SE. fort.	neige, c. couvert.
	7.	12. m.		28. 02		152	SE.	c. demi-couvert.
	9.	6. m.	30	27. 61	+58	169	N. calme.	c. demi-couvert.
	10.	12. m.		28. 19		165	E.	c. ſerein.
Avril	8.	12. s.	24	28. 06	+42	150	NOu.	pluie, c. ſerein.
	9.	12. s.		28. 48		153	NE.	ciel ſerein.
May.	12.	12. m.	20	28. 05	+55	143	N. fort.	c. demi-couv. brouill. pluie.
	13.	8. m.		28. 60		140	NE. ff.	c demi-couvert.
	16.	4. s.	14	28. 27	+37	140	N.	c. demi-couvert.
	17.	6. m.		28. 64		149	NE. fort.	ciel ſerein.
	17.	12. s.	24	28. 50	—50	145	NE. fort.	ciel ſerein.
	18.	12. s.		28. 00		140	NOu. fort.	ciel ſerein, puis demi-couv.
	22.	12. m.	20	28. 19	—55	140	N. fort.	c. couvert, neige.
	23.	8. m.		27. 64		144	SE. fort.	pluie, c. couvert.
Août	3.	9. s.	39	28. 17	—51	131	calme.	c. ſerein, puis couv. pluie.
	5.	12. m.		27. 66		118	NE. fort.	c. demi-couv. puis orage.

Mois

Mois.	Temps jour heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$	Differ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Sept.	7. 9. m.	39	28. 00	−59	135	calme.	ciel ſerein.
	8. 12. s.		28. 07		130	N.	pluie, c. couvert.
	1. 12. s.	32	27. 93	−58	135	S. fort.	c. couvert, enſuite pluie.
	3. 8. m.		27. 35		136	SOu. fort.	pluie, ciel couvert.
	4. 3. m.	48	27. 39	+75	140	NOu. fort.	pluie, ciel couv. puis ſerein.
	6. 3. m.		28. 14		142	Ou.	c. demi-couvert.
	7. 10. s.	36	27. 87	+66	133	SOu. ff.	c. demi-couv. pluie & grele.
	9. 10. m.	17	28. 53	−46	142	Ou.	c. ſerein, enſuite couvert.
	10. 3. m.		28. 07		137	NOu.	c. couvert, enſuite ſerein.
Oct.	10. 10. s.	22	28. 28	−53	144	N.	c. ſer. puis couv. grele & pluie.
	11. 8. s.		27. 75		142	NOu. fort.	ciel demi-couv. puis pluie.
	14. 9. s.	30	28. 12	−59	150	N. fort.	c. ſerein, puis couv. & pluie.
	16. 3. m.		27. 53		148	Ou.	pluie, c. couvert.
	17. 6. s.	26	27. 77	−65	148	calme.	c. ſerein, enſuite couvert.
	18. 8. s.	28	27. 12	+68	151	E. ff.	c. couv. beaucoup de neige.
	19. 12. s.		27. 80		155	NOu.	c. couvert, puis ſerein.
	23. 12. m.	24	28. 29	−84	155	SE. fort.	ciel ſerein.
	24. 12. m.		27. 45		150	SE. ff.	ciel couvert, neige.
	5. 12. s.	42	27. 77	+73	148	Ou.	c. demi-ſerein, puis neige.
	7. 6. s.	30	28. 50	−45	151	NE.	c. demi-couvert.
Nov.	8. 12. s.		28. 05		145	S.	ciel couvert.
	10. 12. s.	35	28. 33	−89	148	SOu. fort.	ciel couvert.
	12. 11. m.		27. 44		144	SOu. fort.	pluie, c. demi-couvert.
	14. 12. s.	36	27. 67	+83	159	E.	c. demi-ſerein.
	16. 12. m.		28. 50		160	S.	c. ſerein.

Mois

Mois.	Temps jour. heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.cent.	Diff. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Déc.	2. 12. m.	48	28. 55	—53	160	S.	c. couvert, neige.
	4. 12. m.		28. 02		164	E.	neige, c. couvert.
	23. 12. m.	21	28. 05	—73	195	Ou.	c. ſerein, puis couvert.
	24. 9. m.		27. 32		163	NE. ff.	c. couvert, neige.

Les décentes ſont déſignées par — & les montées par +.
ff. marque un vent très fort.

Les mois de Janvier & d'Octobre ont été les plus variables.

Les décentes les plus conſidérables ſe trouvent aux mois de Mars & de Janvier; ſavoir: de 118 centiemes parties de pouce, ou d'1 pouce 2 lignes, en 48 heures, le 2 de Mars. Une autre décente de 109 centiemes, ou d'1 pouce 1 ligne, en 24 heures, le 16 Janvier: & une troiſieme de 102 centiemes, ou d'1 pouce $\frac{1}{5}$ ligne, en 24 heures, le 8 Janvier.

Les montées n'ont pas été auſſi conſidérables que les décentes: nous n'en remarquerons que les deux ſuivantes: une de 83 centiemes, ou de 10 lignes environ, en 36 heures, le 14 Novembre, & une ſeconde de 76 centiemes, ou de 9 lignes, en 18 heures, le 9 Janvier.

II. Ther-

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrèmes, & leur différence, avec l'état moyen du froid & de la chaleur pour chaque mois de l'année 1788.

Mois.	Hauteurs extrèmes. Au plus bas Degré.	jour & heure.	Au plus haut. Degré.	jour & heure.	Différence. Degré	Etat moyen. Froid moyen. Degré.	Chaleur moyen. Degré.
Janvier	196	le 20 à 7 h. m.	149	le 22 à 9 h. s.	47	170,3	161,7
Février	188	le 20 à 8 h. m.	146	le 26 à 2 h. s.	42	164,5	159,3
Mars	187	le 2 à 6 h. m.	140	le 29 à 2 h. s.	47	167,9	150,9
Avril	154	le 10. 12. 23. à 6 h. m.	127	le 29 à 2 h. s.	27	149,2	137,4
Mai	154	le 5 à 6 h. m.	116	le 30 à 2 h. s.	38	144,7	131,7
Juin	143	le 3 à 6 h. m.	106	le 25 à 2 h. s.	37	131,9	117,6
Juillet	130	le 28 à 11 h. s.	100	le 18 à 2 h. s.	30	125,0	112,3
Août	135	le 21 à 6 h. m.	111	le 24 à 2 h. s.	24	131,2	120,3
Sept.	149	le 20 à 6 h. m.	108	le 1 à 2 h. s.	41	138,7	123,6
Octobr.	168	le 23 à 6 h. m.	126	le 1 à 2 h. s.	42	149,6	143,1
Novem.	172	le 17 de 6 à 9 h. m.	138	le 5 à 2 h. s.	34	156,3	151,6
Décem.	196	le 23 à 9 h. m.	156	le 8 à 2 h. s.	40	181,1	173,9

D'où l'on voit que le mois de Décembre a été un des plus froids, ſurtout à l'égard de la conſtante intenſité des froids.

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Déliſle.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été plus grande que							
	190 jours.	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.	180 jours.
Janv.	5	7	10	24	31	31	31					1	15	25	29
Févr.		5	13	21	27	29	29					3	18	26	29
Mars		2	11	26	31	31	31					16	26	31	31
Avril					10	30	30			3	21	30	30	30	30
Mai					3	27	31		2	14	28	31	31	31	31
Juin						5	18	5	19	28	30	30	30	30	30
Juillet							0	14	25	31	31	31	31	31	31
Août							23		17	29	31	31	31	31	31
Sept.						13	30	1	11	25	29	30	30	30	30
Oct.				3	16	27	31			2	11	23	31	31	31
Nov.			1	10	24	30	30				1	13	27	30	30
Déc.	11	18	22	31	31	31	31						5	11	20
1788.	16	32	57	115	173	254	315	20	74	132	182	239	305	337	353
du 1 Nov 1787 au 1 Mai 1788.	5	18	46	107	150	182	182				21	66	126	166	180
du 1 Mai au 1 Nov. 1788.					19	72	133	20	74	129	16[illegible]	176	184	184	184

Il réſulte de ces deux tableaux des obſervations thermométriques, que:

Le plus grand froid a été de 196 degrés après la graduation de Délisle. 1.) Le 20 Janvier à 7 heures du matin. Baromètre 27. 77, ciel ſerein & vent du Nord. 2.) Le 23 Décembre à 9 heures avant midi. Baromètre 28. 03, ciel ſerein, vent du NOu.

La plus grande chaleur = 100 degrés, le 18 Juillet à 2 heures après midi. Baromètre 28. 27, calme, ciel demi-couvert, un peu de pluie vers le ſoir & quelques coups de tonnère de loin.

La différence entre ces deux temperatures extrèmes = 96 degrés de Délisle, ou $51\frac{1}{5}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen: c'eſt à dire, la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées le matin & le ſoir, diviſée par leur nombre :

I. Pour l'année entiere, depuis le 1 Janv. jusqu'au 31 Déc. 1788 = $150\frac{9}{10}$ degrés.

II. Pour l'hyver de 1787 à 1788
depuis le 1 Nov. 1787 jusqu'au 1 May 1788 = $162\frac{1}{2}$ degrés
depuis le 1 Déc. 1787 jusqu'au 1 Avril 1788 = $167\frac{3}{5}$ ——

III. Pour l'été de 1788
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Nov. 1788 = $136\frac{4}{5}$ degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Oct. 1788 = $131\frac{7}{10}$ ——

De même, la chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre:

I. Pour l'année entiere, depuis le 1 Janv. jusqu'au 31 Déc. 1788 = $140\frac{1}{3}$ degrés.

II. Pour l'hyver de 1787 à 1788
depuis le 1 Nov. 1787 jusqu'au 1 Mai 1788 = $153\frac{3}{4}$ degrés
depuis le 1 Déc. 1787 jusqu'au 1 Avril 1788 = $158\frac{1}{2}$ ——

III. Pour l'été de 1788
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Nov. 1788 = $124\frac{3}{4}$ degrés
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octob. 1788 = $118\frac{1}{3}$ ——

Il y a eu en 1788, qui eſt une année biſextile de 366 jours, 173 jours de gelée & 239 jours de dégel: par conſéquent 127 jours de gelée continuelle, 193 jours où il n'a gelé point du tout, & 46 jours où il n'a gelé que pendant les nuits.

Parmi les 173 jours de gelée, il y avoient:

115, où le froid a ſurpaſſé				160
57,	-	-	-	170
32,	-	-	-	180 &
16,	-	-	-	190 dégrés.

Enſuite parmi les 239 jours de dégel, on avoit annoté:

182, où la chaleur a ſurpaſſé					140
132	-	-	-	-	130
74	-	-	-	-	120 &
20	-	-	-	-	110 degrés.

3.) Énumération détaillée des jours de grand froid, pour l'hyver de 1787 à 1788, ou depuis le 1 Novembre 1787 jusqu'au 1 Mai 1788, ce qui fait un intervalle de 182 jours.

Le froid a ſurpaſſé 190° en 5 jours, le 15. 16. 19. 20. 21 Janvier. Le froid a été entre:

180

180 & 190	le 4. 12. 22. 27 Décembre, le 9. 18. Janvier, le 14. 15. 19. 20. 21. Février, & le 1. 2 Mars. - - - - -	jours 13
170 & 180	le 3. 5. 10. 11. 20. 21. 26. 28. Décembre, le 8. 14. 17. Janv. le 7. 8. 13. 16. 17. 18. 22. 29. Févr. & le 3. 4. 8 — 12. 15. 16 Mars. - - - - - -	28
160 & 170	le 17. 18. 21. 23 — 30 Nov. le 1. 2. 6. 7. 9. 13. 18. 19. 23 — 25. 29. 30 Déc. le 3 — 5. 10 — 13. 22 — 25. 28 — 30. Janvier, le 2 — 6. 11. 12. 23 Février, & le 5 — 7. 14. 17 — 19. 22 — 29 Mars. - - - - -	61

En 43 jours le froid n'a été que de 150 à 160, & en 32 jours il n'a gelé point du tout. Mais déja le 30 & 31 Octobre 1787, & encore le 5. 6. & 8 Mai 1788, le froid a ſurpaſſé 150 degrés.

Il commença à geler le 30 Octobre 1787 au ſoir, & il gela pour la derniere fois le 8 Mai matin 1788. L'intervalle entre ces deux époques eſt de 192 jours.

4.) Énumération détaillée des jours de grande chaleur, pour l'été de 1788, ou depuis le 1 Mai juſqu'au 1 Novembre 1788, ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La chaleur a été en 20 jours plus grande que 110 degrés, le 20. 24 — 26. 29 Juin, le 7. 12 — 19. 21. 22. 25. 26. 31 Juillet, & le 1 Septembre.

Elle a été obſervée entre:

		jours
120 & 110	le 29. 30 Mai, le 4. 5. 7. 9. 10. 16 — 19. 21. 22. 27. 28. 30 Juin, le 1. 3. 5. 6. 8. 11. 20. 23. 24. 28. 29 Juillet, le 1. 3. 5. 6. 11 — 15. 17. 20 — 22. 24. 26 — 28 Août, & le 2. 4. 5. 7. 10. 11. 13 — 15. 26 Septembre. - - - - - -	54
130 & 120	le 1. 10. 11. 15 — 19. 25. 26. 28. 31 Mai, le 1 — 3. 6. 8. 11. 13. 14. 23 Juin, le 2. 4. 9. 10. 27. 30 Juillet, le 2. 4. 7. 9. 10. 16. 18. 19. 23. 25. 29. 31 Août, le 3. 6. 8. 9. 12. 16. 21 — 25. 27 — 29 Septembre, & le 1. 7 Octobre.	55
140 & 130	le 2. 3. 5 — 9. 13. 14. 20 — 22. 24. 27 Mai, le 12. 15. Juin, le 8. 30 Août, le 17. 18. 20. 30. Sept. & le 2 — 6. 8 — 11. Octobre. - - - -	31

En 16 jours la chaleur a été moindre que 140, & en 8 jours, le 18 — 23. 30. 31 Octobre, il n'a dégelé point du tout. Mais déja en Avril la chaleur a été en 3 jours plus grande que 130, & en 18 jours entre 140 & 130, ainſi qu'au 5 Novembre.

Il gela pour la derniere fois le 8 Mai matin. Thermomètre de Délisle 150. Baromètre 28. 05. Ciel ſerein, vent du Nord, la rivière charia des glaces.

Il recommença à geler le 13 Octobre matin, Thermomètre 152. Barom. 27. 83. Ciel ſerein, vent fort du Nord.

L'intervalle entre ces deux époques eſt de 152 jours; par conſéquent de 34 jours moins long que l'année 1787, & de 7 jours moins long que celui de l'année moyenne.

III.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1788.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.	Variable.
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	3	15	11	2	4	4	6	4	2	4	2	5	
Févr.	5	8	13	3	2	4	10	4	1	1	2	5	
Mars	9	14	8	0	3	9	10	4	0	1	1	1	2
Avril	7	15	8	1	1	7	6	5	0	3	0	5	3
Mai	1	13	13	4	9	5	2	2	0	0	0	10	3
Juin	3	20	6	1	8	4	10	0	0	1	1	3	3
Juillet	9	18	3	1	6	8	4	2	0	1	3	4	3
Août	7	18	6	0	5	4	12	2	3	1	0	4	
Sept.	9	15	6	1	10	3	7	3	1	1	1	4	
Oct.	5	10	9	7	4	1	4	4	3	5	3	7	
Nov.	6	18	5	1	0	3	9	3	7	5	1	2	
Déc.	10	15	3	3	2	8	3	3	10	3	1	1	
Annee 1788.	74	179	91	24	54	60	83	36	27	26	15	51	14
du 1 Nov. 1787 au 1 Mai 1788.	37	73	64	8	21	39	43	25	13	13	7	21	0
du 1 Mai au 1 Nov 1788.	34	94	42	14	42	25	39	13	7	9	8	32	9

2.)

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages : tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1788.

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages.			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	300	9	10	6	6
Février	346	6	14	4	5
Mars	222	8	18	3	2
Avril	230	8	13	5	4
Mai	358	17	7	2	5
Juin	250	12	13	2	3
Juillet	209	12	9	3	7
Août	216	9	15	4	3
Septembre	223	13	10	3	4
Octobre	377	8	6	8	9
Novembre	233	2	12	11	5
Décembre	245	7	8	13	3
Annee 1788.	267	111	135	64	56
du 1 Nov. 1787. au 1 Mai 1788.	279	51	75	32	24
du 1 Mai 1788. au 1 Novembre.	272	73	60	20	31

Toute cette année a donc été moins venteuſe que la précédente. Le mois le moins venteux, ou le plus calme, a été celui de Juillet ; & le mois le plus venteux, celui d'Octobre.

Le

Le vent dominant a été celui de l'Eſt: il a ſoufflé le plus ſouvent en Mars, Août & Février. Mais le vent le plus fort a été celui du NOu, qui a regné ſurtout en Mai, puis en Octobre.

3.) Direction des vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	Le 4. 5. 22. 26 Mai, le 13. 14. 15. 16 Juin, le 9 Août, le 17. 18. 19 Septembre, le 13 & 14 Octobre.	14
NE.	Le 9. 10 Janvier, le 13 Février, le 17 Avril, le 12. 13. 17. 19 Mai, le 30 Juillet, le 5 Août, le 19 Octobre, le 7 Novembre, & le 13 Décembre.	13
Eſt.	Le 5. 14. 15. 16. 17. 29 Février, le 1. 18 Mars, le 22 Avril, le 20 Mai, le 26 Juin, le 29 Août, le 28 Septembre, le 12. 18 Octobre, le 14 Novembre, & le 9 Décembre.	17
SE.	Le 25 Janvier, le 3. 26 Février, le 3. 5 Mars, le 24. 25 Avril, le 11. 23 Mai, le 26. 31 Juillet, le 15 Août, le 1 & 24 Octobre.	14
Sud.	Le 17 Janvier, le 2 Février, le 1. 2 Août, le 2 Octobre, le 8 Novembre, & le 7 Décembre.	7
SOu.	Le 2. 11. 22. 30 Janvier, le 12. 31 Mars, le 1. 5. 26 Avril, le 7 Juin, le 11 Septembre, le 6. 7. 8. 15 Octobre, le 5. 11. 12 Novembre, le 20 & 24 Decembre.	20
		85

3.) Direction des Vents forts.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours.
Oueſt.	Le 1. 31 Janvier, le 4. 27 Février, le 6 Mars, le 23 Juillet, le 5, & 11 Octobre. - -	85 8
NOu.	Le 7. 16. 23 Janvier, le 1. 11. 12. 28 Février, le 13 Mars, le 27. 28 Avril, le 3. 7. 14. 18. 25. 27 Mai, le 1 Juin, le 6. 12 Septembre, le 4. 10 Octobre & le 23 Décembre. -	22
		115

Direction	Parmi ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux	Nombre de jours.
Nord.	du 4 Mai, & du 18 Septembre. - - - -	2
NE.	du 13 Février, 12. 13 Mai, 19 Octobre, & du 13 Décembre. - - - - - - - -	5
Eſt.	du 14 Février, 26 Juin, 18 Octobre, & du 14 Novembre. - - - - - -	4
SE.	du 26 Juillet, & du 24 Octobre. - - -	2
Sud.	du 17 Janvier. - - - - - - -	1
SOu.	du 11 Janvier, 6. 7. 8. 15 Octobre, du 20 & 24 Décembre. - - - - - -	7
NOu.	du 1 Février, 27 Avril, & du 3 Mai. - -	3
		24

IV.

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours.	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	Pluie. petite jours.	Neige. forte jours.	Neige. petite jours.
Janvier	3	19	4			2	12
Février	5	12	8		1	0	15
Mars	14	6	4		1	1	7
Avril	6	10	5		13	0	4
Mai	8	5	5	2	11	2	3
Juin	9	5	1	7	7		1
Juillet	9	6	2	6	16		
Août	6	10	2	5	15		
Septem.	10	4	6	2	6		1
Octobre	8	13	1		11	1	5
Novem.	2	16	6		4	0	10
Décem.	17	9	13		.	0	8
Annee 1788.	97	115	57	22	85	6	66
				107		72	
du 1 Nov. 1787, au 1 Mai 1788.	32	85	29	0	25	5	66
				25		71	
du 1 Mai au 1 Nov. 1788.	50	43	17	22	66	3	10
				88		13	

Il a neigé pour la derniere fois le 12 Juin: & il a recommencé à neiger le 17 Septembre.

L'intervalle entre la premiere neige du 23 Octobre 1787, & la derniere du 12 Juin 1788, eſt de 233 jours: celui entre cette derniere neige du 12 Juin & la premiere du 17 Septembre 1788, de 97 jours.

Il a grélé 7 fois, le 26 Avril, le 21 & 26 Mai, le 12 Juin, le 8 & 11 Octobre, & le 3 Novembre.

Il y a eu 11 orages complets, le 23. 26 & 28 Juin, le 1. 5. 15. 19. 22. 31 Juillet, le 5 & 24 Août. Aucun d'eux n'a fait du dégat en ville. Il a tonné de loin en 4 jours, le 24 & 27 Juin, le 18 Juillet, & le 17 Août.

Le nombre des aurores boréales obſervées en cette année 1788, eſt de 10. Les plus luiſantes, au nombre de 8, ſont celle du 6 Février, avec des dards colorés, celles du 28 Mars, du 3, 4, 5 & du 27 Septembre, dont celle du 4 a ſurpaſſé toutes les autres en ſplendeur & en beauté: enfin celles du 21 & 22 Octobre. Les deux autres moins conſidérables ont été vües le 6 & 26 Septembre.

Enfin quatre parhélies au mois de Décembre, le 15. 17. 23 & 28.

La riviere Néva a débaclé le 20 Avril, après avoir été couverte de glaces pendant 147 jours. Le Baromètre au moment du debacle 28. 06. Thermomètre de Délisle 145, ciel couvert, vent foible du NE. Les glaces du Ladoga parurent le 4 Mai, & la riviere les charia le 5. 6. 8. 12. 15. 16 25 & 26 du même mois.

Le 15 Novembre ont reparû les premieres glaces, & la riviere les a charié en abondance jusqu'au ſur-lendemain 17 matin, où elle a été priſe par un froid de 172 degrés après la graduation de Déliſle: Baromètre 28, 30, ciel ſerein, vent foible du SE; enſuite brouillard, ciel demi-couvert & neige. L'intervalle entre la debacle & la priſe de la Neva a donc été en 1788, de 200 jours.

Fig. 2.

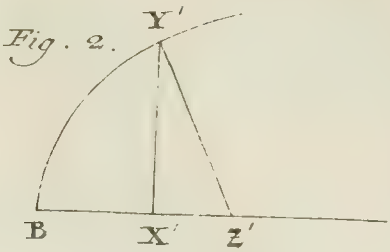


Fig. 4.

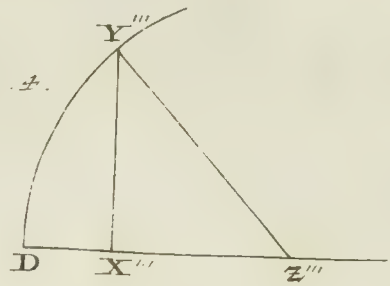
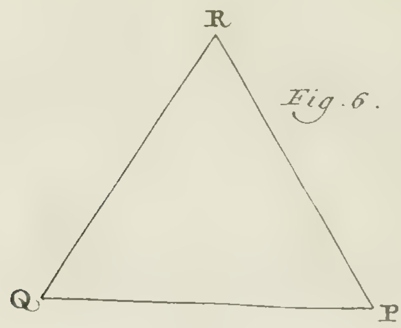


Fig. 6.



5.

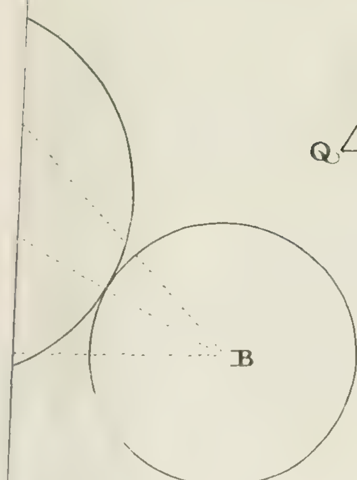


Fig. 1.

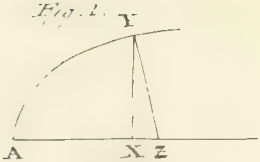


Fig. 2.

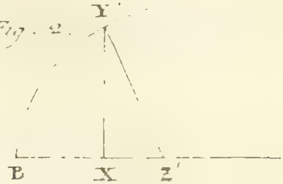


Fig. 3.

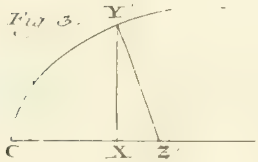


Fig. 4.

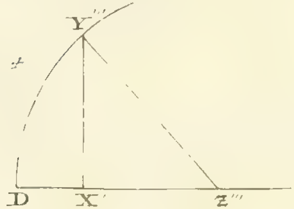


Fig. 5.

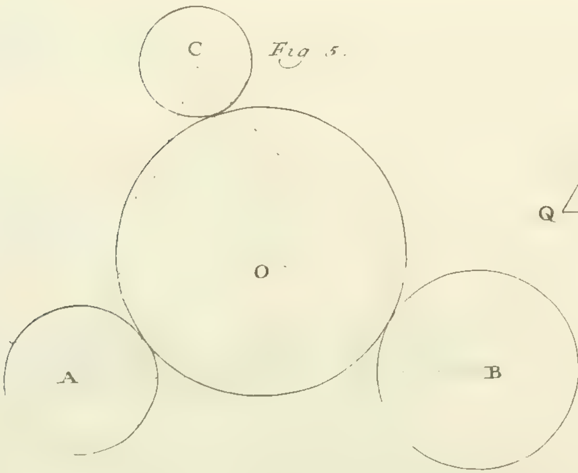
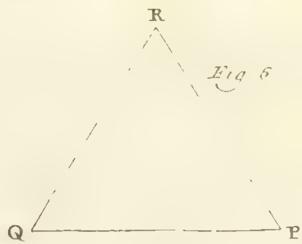


Fig. 6.



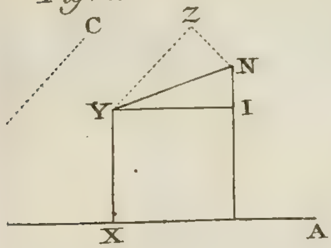


Fig. 2.

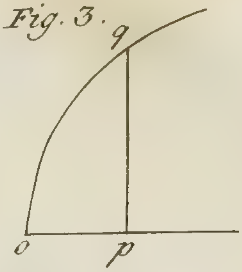
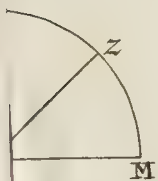


Fig. 3.

5.



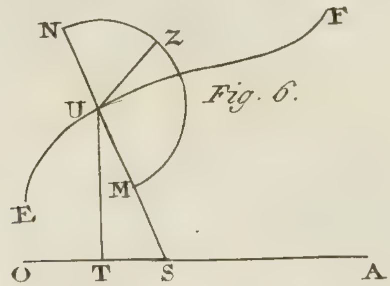


Fig. 6.

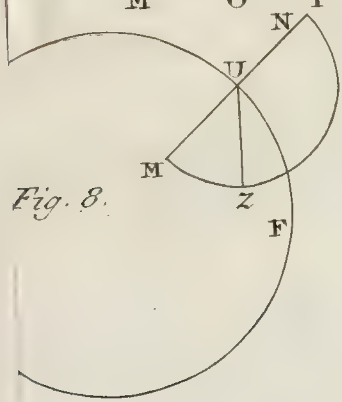


Fig. 8.

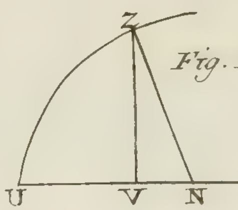


Fig. 10.



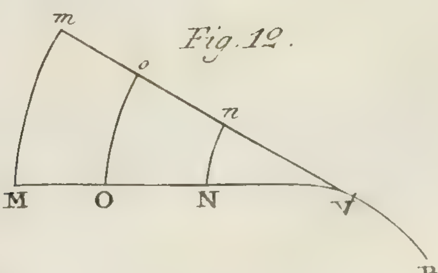


Fig. 12.

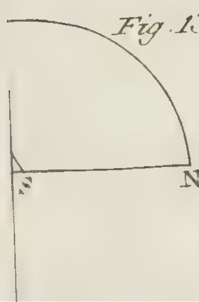
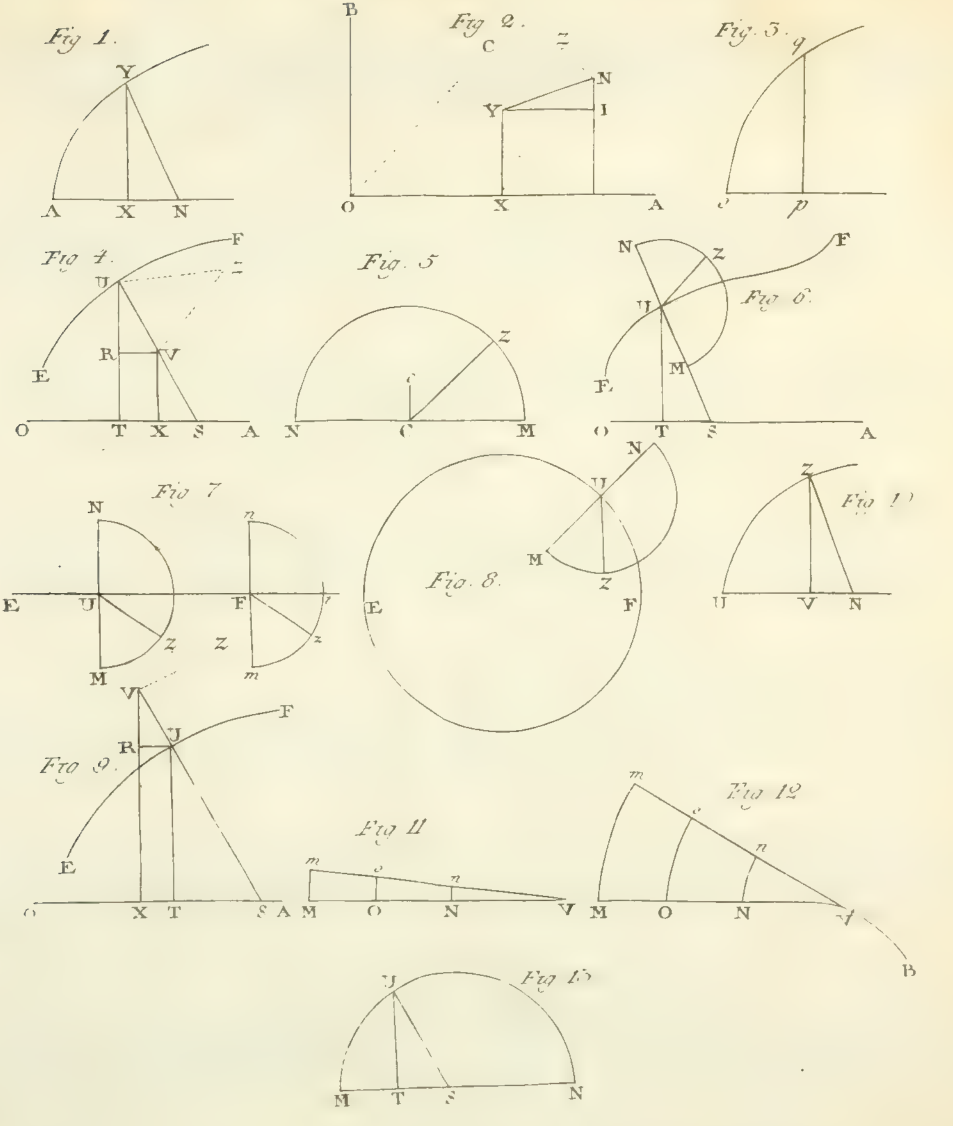


Fig. 13.


Fig. 1.
Y
A X N
Fig. 2.
B
C
Y N I
O X A
Fig. 3.
q
p
Fig. 4.
F
U
R V
E
O T X S A
Fig. 5.
z
c
N C M
N
Z
F
Fig. 6.
U
M
E
O T S A
Fig. 7
N
n
E U F
z z
M m
N
U
M
Fig. 8.
E
z
F
Z
U V N
V
F
R J
Fig. 9.
E
O X T S A
Fig. 11
m
o
n
M O N V
m
Fig. 12
o
n
M O N
B
U
M T S N

Acta Acad. Imper. Sc. Petropol. Tom. VI. Tab. III.

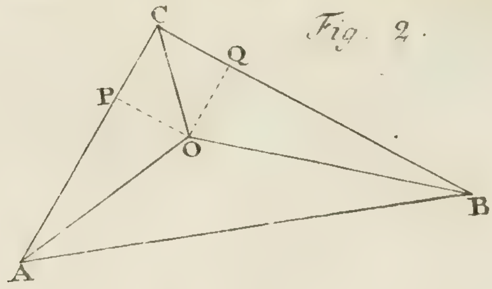


Fig. 2.

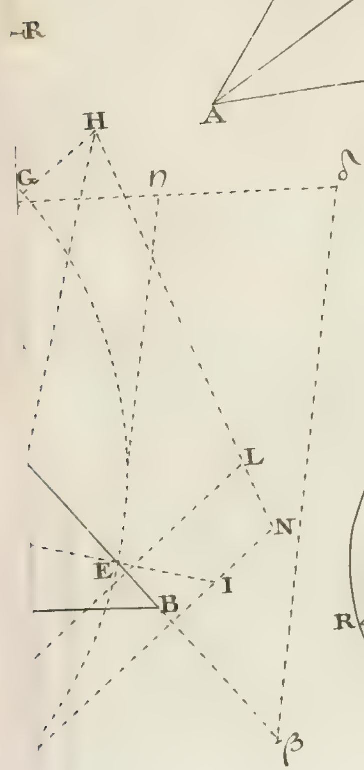


Fig. 3.

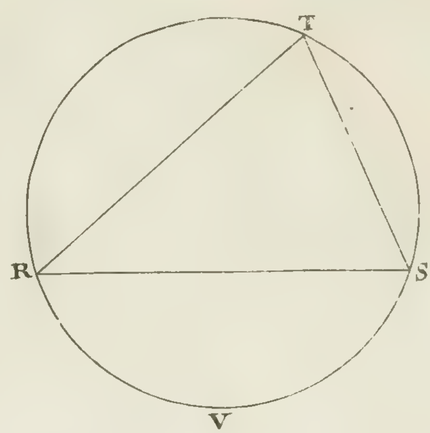


Fig. 1

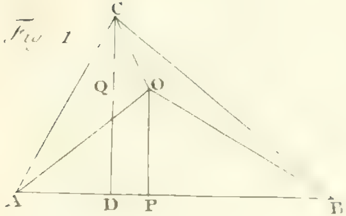


Fig. 4

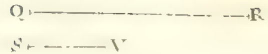


Fig. 2

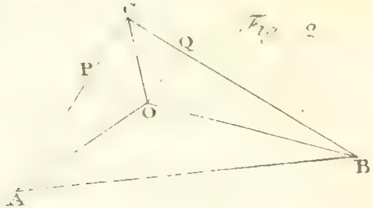


Fig. 5

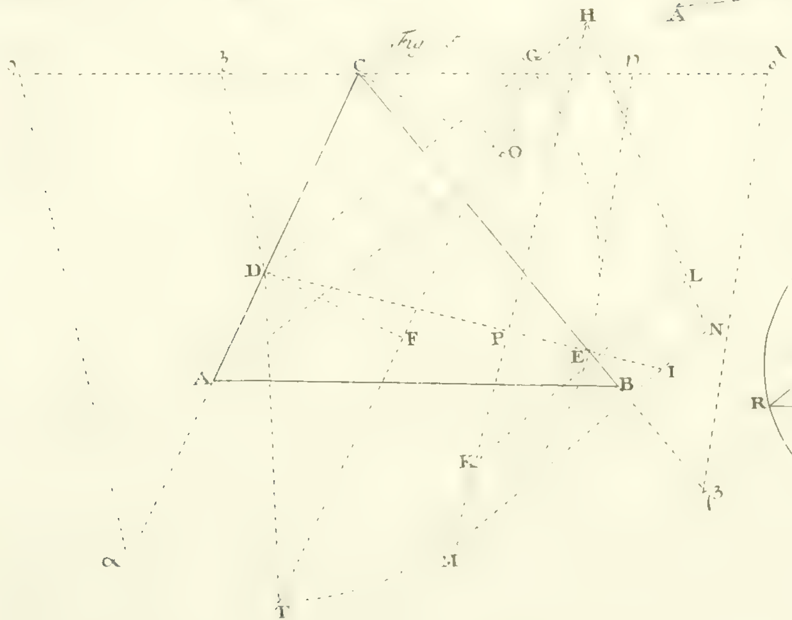
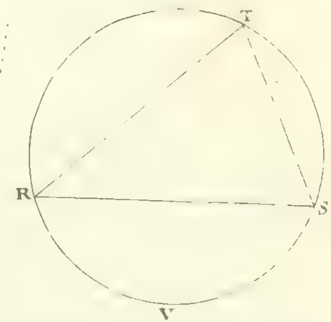


Fig. 3



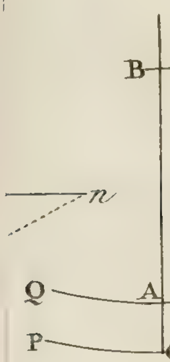


Fig. 11.

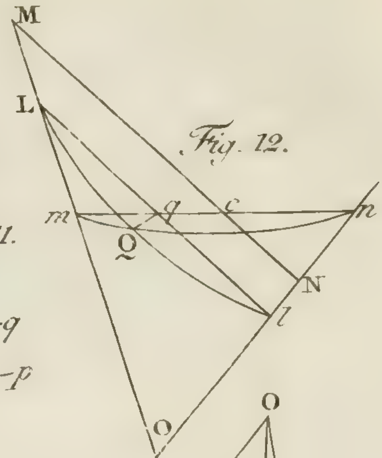


Fig. 12.

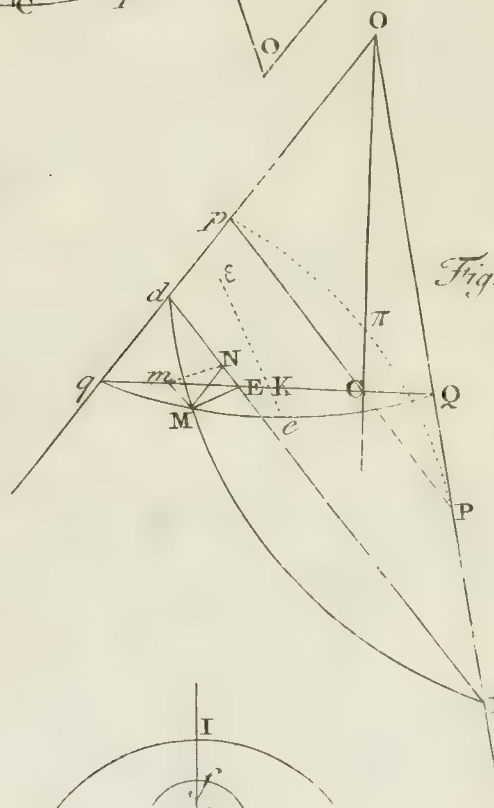
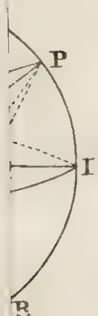


Fig. 14.



ig. 15.

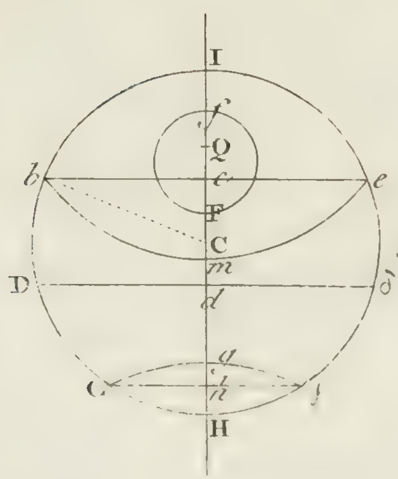


Fig. 16.

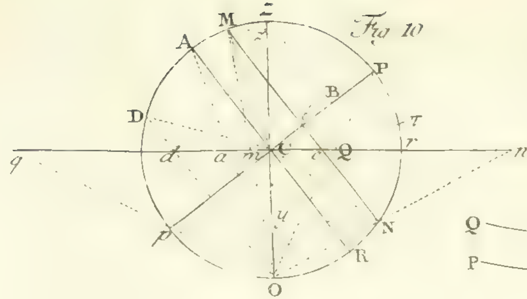


Fig. 10.

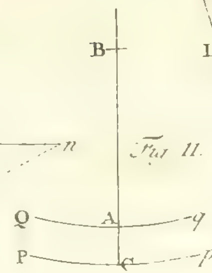


Fig. 11.

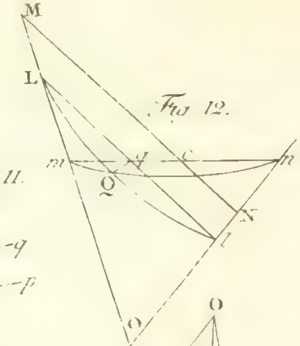


Fig. 12.

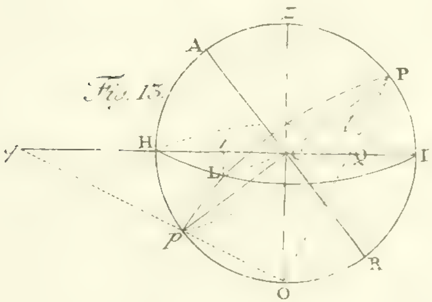


Fig. 13.

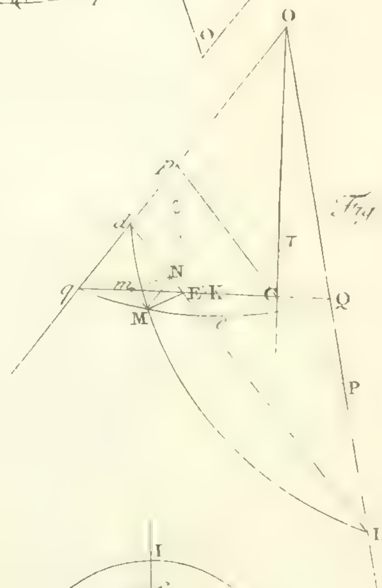


Fig. 14.

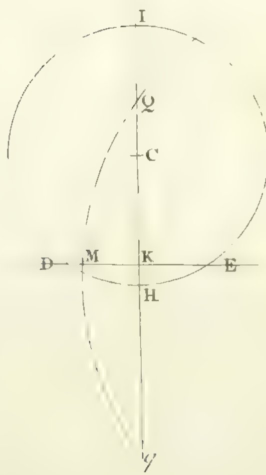


Fig. 15.

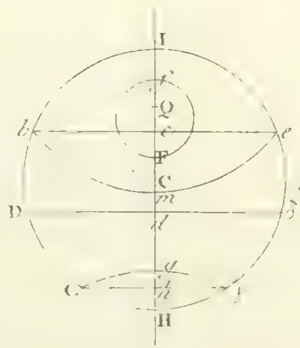


Fig. 16.

ig. 1.

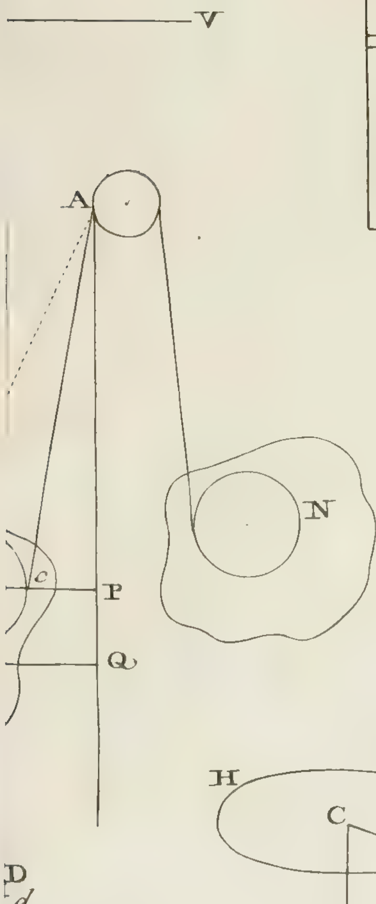
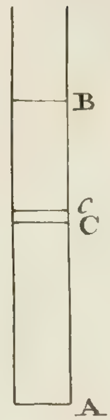


Fig. 3.



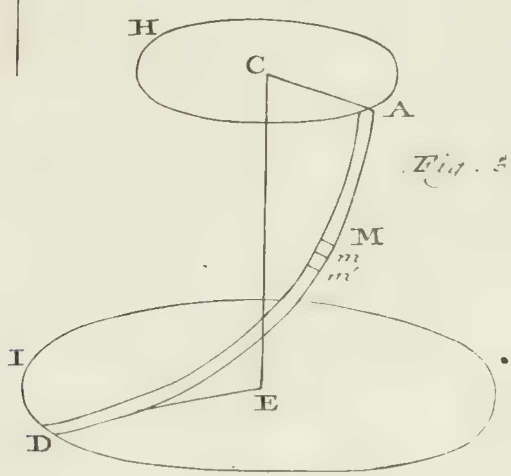
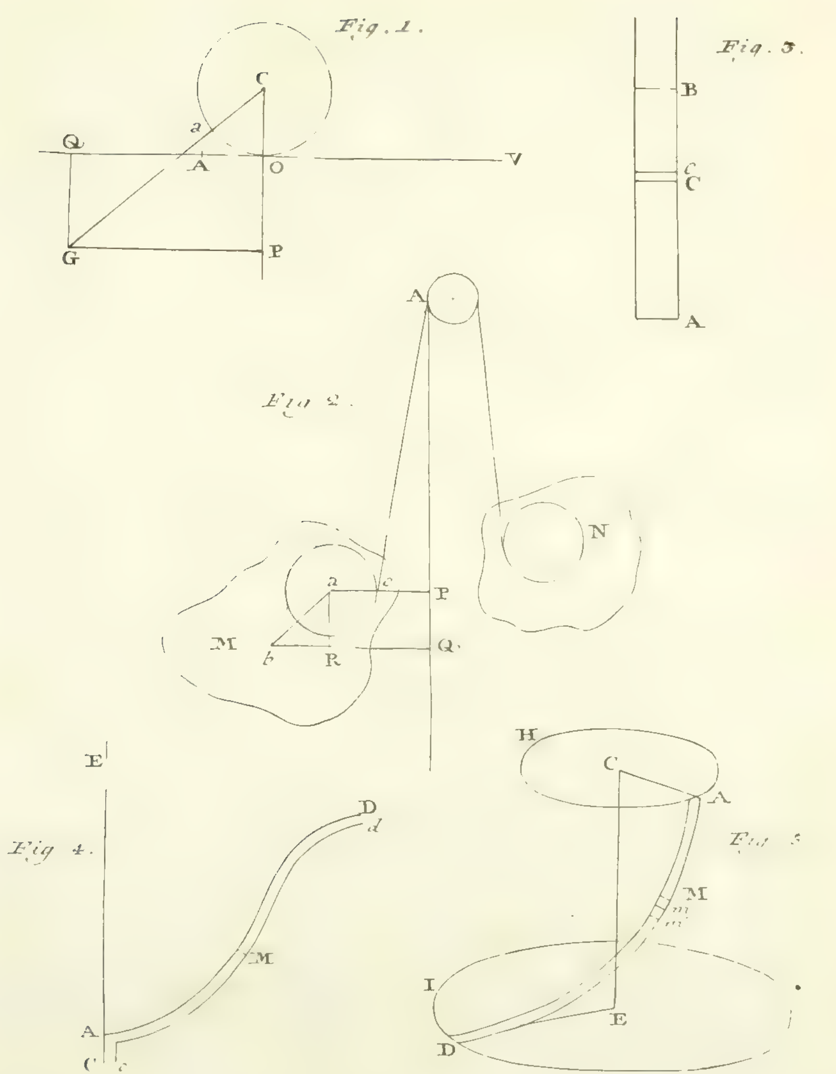


Fig. 5.


Fig. 1.
C
a
Q
A
O
V
G
P
Fig. 3.
B
c
C
A
Fig. 2.
A
N
a
c
P
M
b
R
Q
H
C
A
E
D
d
Fig. 4.
M
A
C
c
M
m
m
I
E
D

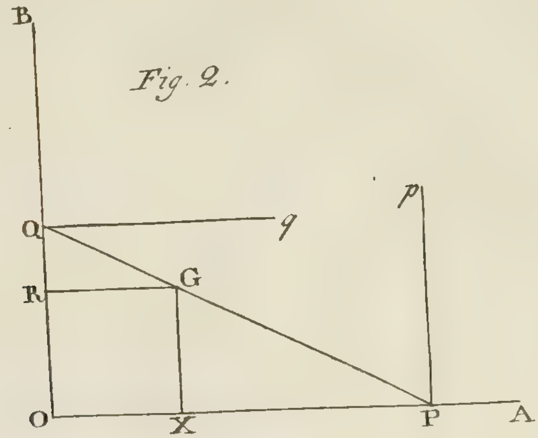


Fig. 2.

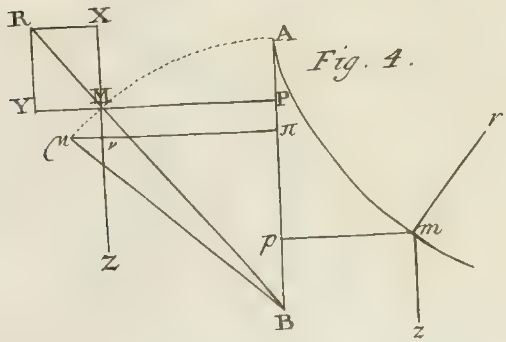


Fig. 4.

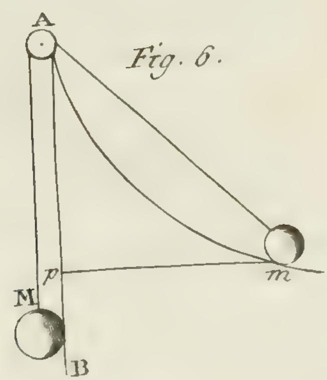


Fig. 6.

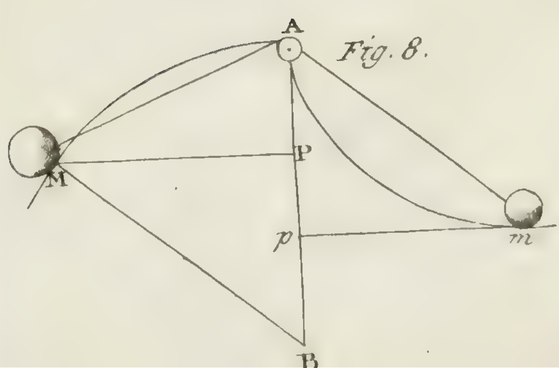


Fig. 8.

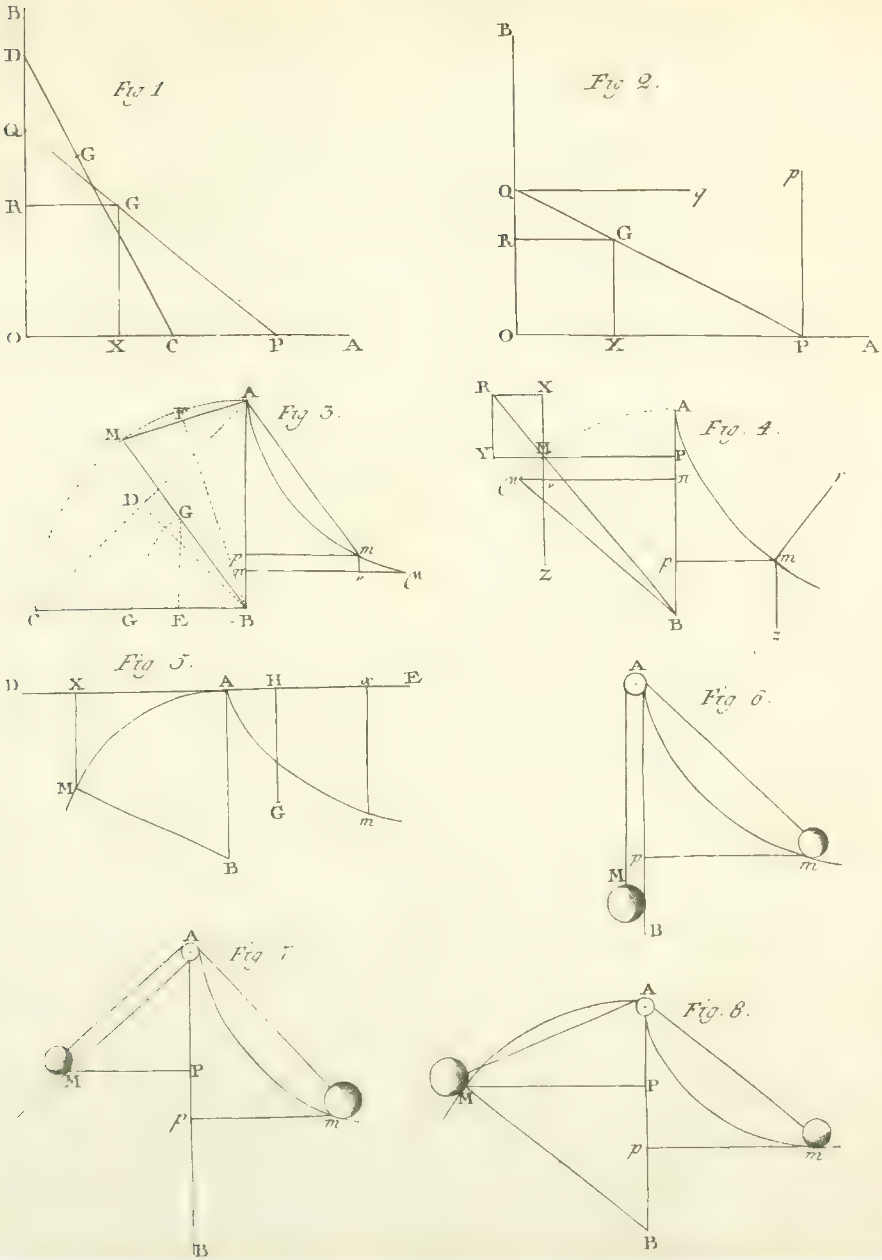

Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Fig. 2.

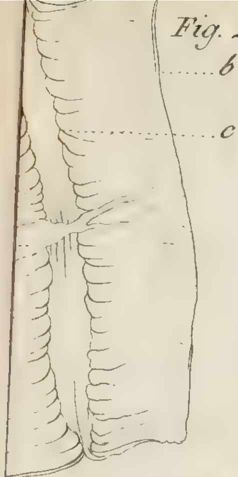
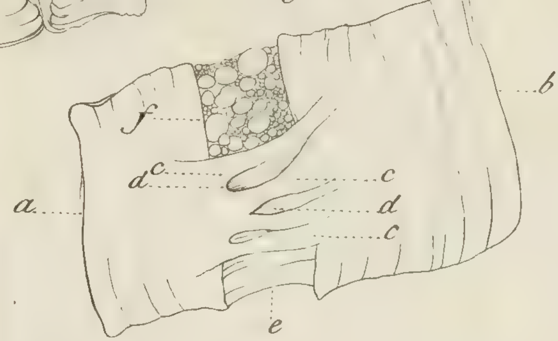
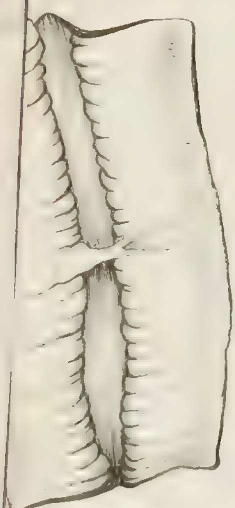
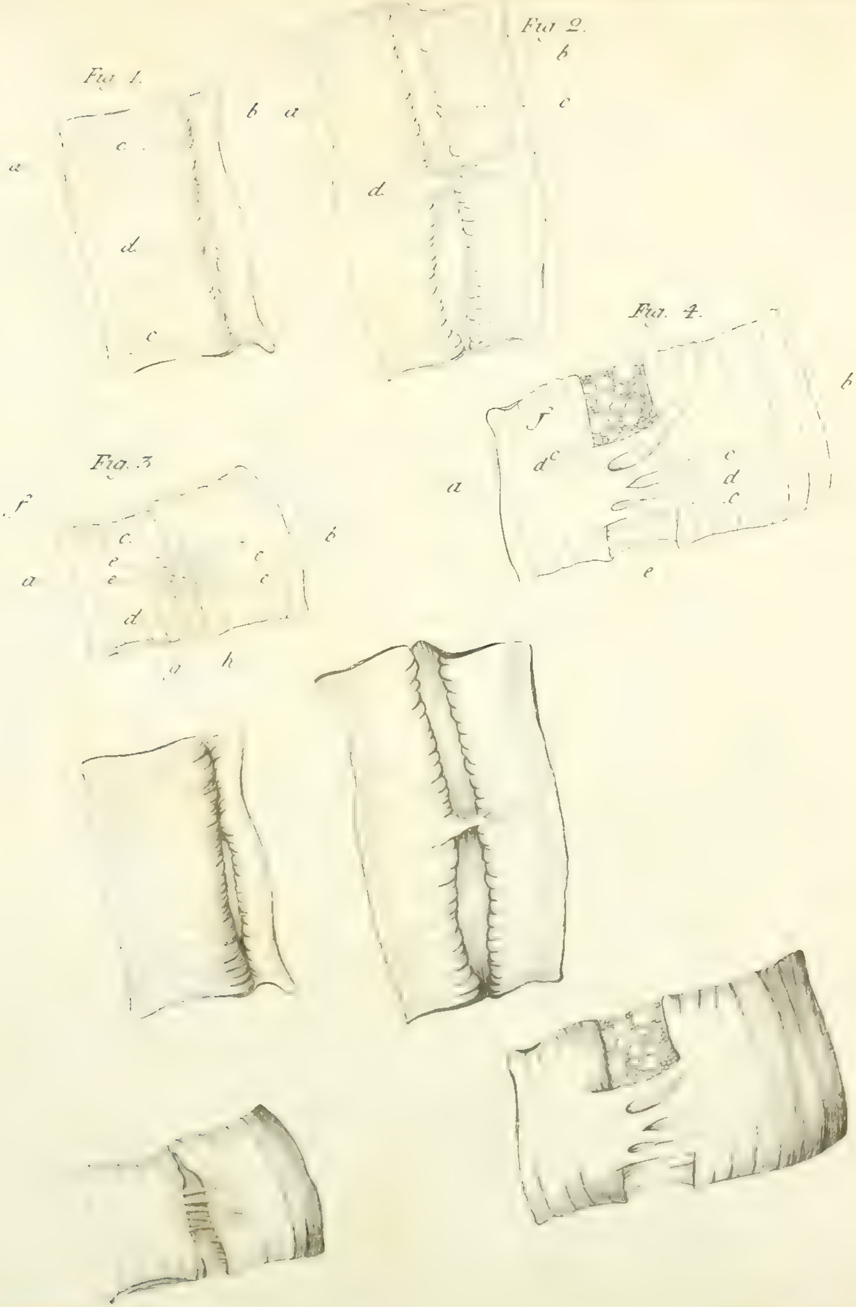


Fig. 4.








Fig. 1.
a
b
c.
d.
c
Fig. 2.
b
a
c
d.
Fig. 3.
f
c.
e
e
a
c
c
b
d
a
h
Fig. 4.
b
f
d c
a
c
d
c
e

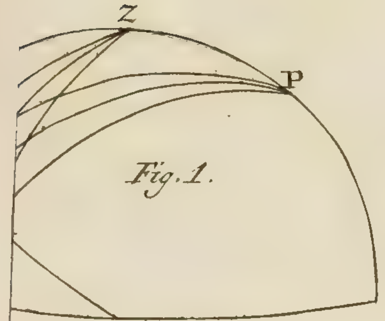


Fig. 1.

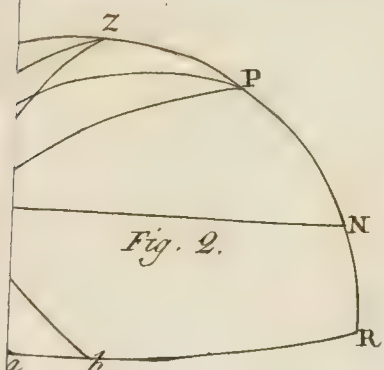
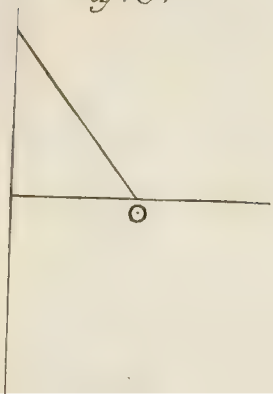


Fig. 2.

Fig. 3.



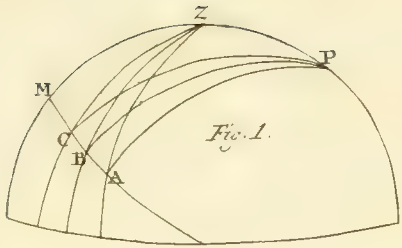


Fig. 1.

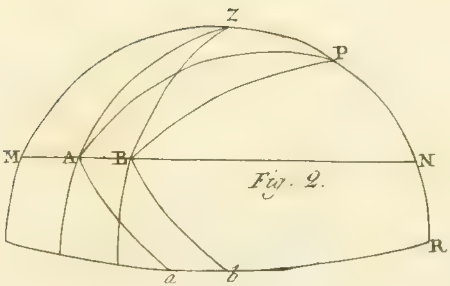
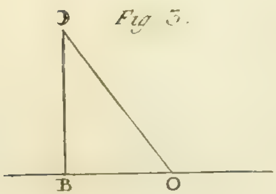


Fig. 2.

Fig 3.



AMNH LIBRARY
100127231